Государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«Нижегородский институт развития образования»

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС «ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ»

7 класс

Учебно-методическое пособие

Нижний Новгород
Нижегородский институт развития образования
2014

УДК 372.016:51
ББК 74.262.21
Ф18

С о с т а в и т е л и:

М. А. Мичасова, канд. пед. наук, доцент кафедры теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО;

И. Г. Малышев, канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО;

М. В. Котельникова, старший преподаватель кафедры теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО

Рекомендовано к изданию научно-методическим экспертным советом ГБОУ ДПО НИРО

Ф18 **Факультативный** курс «За страницами учебника математики» : 7 класс : учебно-методическое пособие / сост.: М. А. Мичасова, И. Г. Малышев, М. В. Котельникова. — Н. Новгород : Нижегородский институт развития образования, 2014. — 64 с.

ISBN 978-5-7565-0604-4

В основу предлагаемого пособия положены материалы факультативного курса, выполняющего функцию поддержки основных курсов цикла математического образования основной школы и ориентированного на углубление и расширение предметных знаний по математике. Содержание курса охватывает избранные вопросы, объединенные в главы. Его объем 35 часов позволит учителю самому выбирать материал для занятий.

Пособие может использоваться для проведения уроков и факультативных занятий в 7-х классах общеобразовательных организаций.

УДК 372.016:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-7565-0604-4

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Факультативные занятия призваны развивать способности и интересы учащихся, увидеть момент зарождения интереса к математике на первичном уровне, поддерживать его до познавательного уровня и тем самым создавать основы для выбора профиля в старшей школе. Основная задача факультативных занятий: с учетом интересов и склонностей учащихся расширить и углубить знания по предмету, обеспечить усвоение ими программного материала, ознакомить школьников с некоторыми общими идеями современной математики, научить применять полученные знания на практике. Программа данного курса включает ряд основных тем (независимых друг от друга), содержание которых непосредственно примыкает к общему курсу алгебры и геометрии 7-го класса. Как показывает анализ психолого-педагогической литературы и собственный педагогический опыт авторов, особое значение на факультативных занятиях должно придаваться вопросам организации самостоятельной работы учащихся, обязательно следует учитывать уровень развития и подготовленности учащихся, их интерес к тем или иным разделам программы. Содержание данного курса избыточно и не укладывается в отведенные часы. Авторы исходили из того, что учитель сам может отобрать материал по душе и предложить ученикам разнообразные по содержанию занятия.

В результате освоения курса учащийся *должен:*

- уметь решать задачи элементарной математики соответствующей ступени образования, в том числе задачи олимпиад;
- использовать информационную образовательную среду, предоставленную учителем, уверенно владеть основными элементами этой среды – математическими компьютерными инструментами;
- иметь представление о широком спектре приложений математики и знать доступные учащимся математические элементы этих приложений.

В ходе занятий школьник *научится:*

- выполнять вычисления с рациональными и целыми числами, сочетая устные и письменные приемы вычислений;
- понимать уравнение как важнейшую математическую модель для описания и изучения разнообразных реальных ситуаций, решать текстовые задачи алгебраическим методом;
- понимать функцию как важнейшую математическую модель для описания процессов и явлений окружающего мира, применять функциональный язык для описания и исследования зависимостей между физическими величинами;
- решать несложные задачи на построение, применяя основные алгоритмы построения с помощью ИКТ;
- решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин (используя при необходимости справочники и технические средства).

Он *получит возможность:*

- овладеть специальными приемами решения уравнений и систем уравнений; уверенно применять аппарат уравнений для решения разнообразных задач из математики, смежных предметов, практики;
- углубить и развить представления о пространственных геометрических фигурах;
- приобрести опыт исследования свойств планиметрических фигур с помощью компьютерных программ;
- приобрести опыт выполнения проектов и исследований по различным темам.

Структура и содержание курса

№ п/п	**Название разделов и тем**	**Всего,** *час.*	**В том числе**			**Форма контроля**
			Лекции	**Практические, лабораторные, семинарские занятия**	**Выход в компьютерный класс**	
1	***Числовые и алгебраические конструкции***	***12***	***3***	***6***	***3***	
1.1	Числа	3	1	2		
1.2	Сравнение чисел	3	1	1	1	Тест
1.3	Графы	2	1		1	Исследование
1.4	Принцип Дирихле	2		2		
1.5	Масштаб и объем	2		1	1	
2	***Геометрические конструкции***	***10***	***1***	***3***	***6***	
2.1	Задачи на разрезание	2		1	1	
2.2	Игра «Танграм»	2		1	1	
2.3	Геометрические неравенства	1	1			
2.4	Дружим с компьютером	5		1	4	Исследование
3	***Реальная математика***	***10***	***3***	***7***		
3.1	Задачи на движение с постоянной скоростью	4	2	2		
3.2	Задачи на расчет массы тел	3	1	2		
3.3	Задачи из материалов международных исследований математического уровня учащихся основной школы	3		3		
Итого		**32**	**7**	**16**	**9**	
Итоговый контроль		**3**				Зачет, учебные исследования, проект
Всего		**35**				

Основное содержание курса

Тема 1. Числовые и алгебраические конструкции

» ***1.1. Числа***

Особенности десятичной системы счисления. Вычисления с рациональными числами. Алгоритм Евклида. Знакомство с арифметическим методом решения задач. Простая арифметика.

» ***1.2. Сравнение чисел***

Сравнение и упорядочивание рациональных чисел. Сравнение степеней с натуральными показателями. Дроби, доли, средние. Задачи математических олимпиад.

» ***1.3. Графы***

Знакомство с графами. Вершины и ребра графов. Примеры графов. Степень вершины. Основные понятия. Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях. Деревья. Разные задачи.

» ***1.4. Принцип Дирихле***

Знакомство с принципом Дирихле. Доказательство. Решение задач. Ищи там, где легче. Высматривай знакомое.

» ***1.5. Масштаб и объем***

Различные подходы к сравнению и вычислению площадей и объемов. Изменение площадей и объемов при масштабировании.

Тема 2. Геометрические конструкции

» ***2.1. Задачи на разрезание***

Рассмотреть различные способы построения линии разреза фигур, правила, позволяющие при построении этой линии не терять решения. Симметрия.

» ***2.2. Игра «Танграм»***

Развитие комбинаторных навыков учащихся. Китайская головоломка «Танграм». Геометрические исследования. Составление различных фигур.

» ***2.3. Геометрические неравенства***

Неравенство треугольника. Другие геометрические неравенства. Пифагор и его выход на действительное число. Многоугольники. Моделирование многоугольников.

» ***2.4. Дружим с компьютером***

Геометрические исследования в компьютерной среде, связанные с основными понятиями планиметрии. Отрезки и углы. Треугольники и четырехугольники. Установление вида треугольника и четырехугольника. Построение с помощью компьютерных инструментов. Установление некоторых закономерностей.

Тема 3. Реальная математика

» ***3.1. Задачи на движение с постоянной скоростью***

» ***3.2. Задачи на расчет массы тел***

» ***3.3. Задачи из материалов международных исследований математического уровня учащихся основной школы***

Входная диагностика к факультативному курсу

Задания

1. Найдите дробь со знаменателем 19, которая больше $\frac{5}{7}$, но меньше $\frac{6}{7}$.

2. В классе меньше 30 учеников. За контрольную работу по математике пятая часть учеников получила пятерки, четвертая часть – тройки, а половина – четверки. Остальные получили двойки. Сколько учеников было в классе? Сколько из них получили двойку?

3. Разделите семь яблок поровну на 12 человек, не разрезая яблоки более чем на 4 части.

4. В парламенте одной из стран 150 депутатов. По крайней мере, один из них честен. В каждой паре депутатов хотя бы один продажен. Сколько всего честных депутатов в парламенте данной страны?

5. Вычислите: $-90-89-88-...-1+0+1+2+...+98+99+100$.

6. Дима с собакой пошел встречать папу. Когда собака увидела папу, она побежала к нему со скоростью 5 м/с. Добежав до него, она сразу же побежала обратно к Диме. Добежав до Димы, собака снова побежала к папе и т. д. Какое расстояние пробежала собака, если Дима и папа двигались со скоростью 1,5 м/с, а первоначальное расстояние между ними было равно 300 м?

Решения

1. $\frac{14}{19}$, $\frac{15}{19}$.

2. Так как число учеников, получивших ту или иную оценку, всегда натуральное, то для решения задачи надо найти такое натуральное число – меньше 30, одновременно делящееся на 5, 4 и 2. Единственно возможным ответом является число 20. Тогда в классе получили «пятерки» – 4 ученика, «четверки» – 10 учеников, «тройки» – пять учеников. Значит, «двойку» получил один ученик.

3. Так как $7 : 12 = \frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$, то надо разделить 3 яблока на четыре части, а 4 яблока каждое на три части и каждому человеку дать по $\frac{1}{4}$ части и $\frac{1}{3}$ части яблока.

4. 1.

5. $-90-89-88-\ldots-1+0+1+2+\ldots+98+99+100=(91+100)\cdot 5=191\cdot 5=955$.

6. Так как Дима и папа двигались со скоростью каждый по 1,5 м/с, то скорость сближения будет равна 3 м/с и они встретятся через 300 м : 3 м/с=100 с. Так как скорость собаки 5 м/с, то за 100 с она пробежит 500 м.

1. ЧИСЛОВЫЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

1.1. Числа

Рассмотрим пары целых чисел (m, n). С этими парами разрешается выполнять следующие три операции:

- 1-я операция – из пары (m, n) делаем пару ($m + n$, n).
- 2-я операция – из пары (m, n) делаем пару ($m - n$, n).
- 3-я операция – из пары (m, n) делаем пару (n, m).

Вопрос: можно ли указанными операциями из пары (19, 98) получить пару (5, 11)?

После нескольких проб вы, конечно же, найдете решение. Например:

$$(19, 98) \xrightarrow{3} (98, 19) \xrightarrow{2} (79, 19) \xrightarrow{2} (60, 19) \xrightarrow{2} (41, 19) \xrightarrow{2} (22, 19) \xrightarrow{2} (3, 19) \xrightarrow{3} (19, 3) \xrightarrow{2} (16, 3) \xrightarrow{2} (13, 3) \xrightarrow{2} (10, 3) \xrightarrow{2} (7, 3) \xrightarrow{2} (4, 3) \xrightarrow{2} (1, 3) \xrightarrow{3} (3, 1) \xrightarrow{1} (4, 1) \xrightarrow{1} (5, 1) \xrightarrow{3} (1, 5) \xrightarrow{1} (6, 5) \xrightarrow{1} (11, 5) \xrightarrow{3} (5, 11).$$

А можно ли из той же исходной пары (19, 98) получить другую пару (12, 183)? А пару (35, 119)? Какие вообще пары можно связать друг с другом разрешенными преобразованиями, а какие нет? Вот естественные вопросы, которые возникают при обдумывании решения исходной задачи.

В некотором смысле этот пример идеален: он вроде бы о пустяках, о простом сложении и вычитании чисел. Предлагается правило, по которому с помощью данных действий из одной пары целых чисел можно получить другую. А на самом деле он касается одной из фундаментальных проблем арифметики, ведущих свое начало от Евклида.

Страничка истории

ЕВКЛИД

Об Евклиде почти ничего не известно. Иногда даже сомневаются в его существовании. Тем не менее в течение двух тысяч лет это имя остается символом чистой математики, квинтэссенцией человеческой мысли.

Даты жизни Евклида приблизительны: 330 – 275 г. до н. э. Грек по происхождению, он жил в Александрии, которая была в то время столицей эллинистической культуры.

По его 15 книгам, объединенным общим названием «Начала», учились математики всего мира на протяжении многих веков.

Первые четыре книги посвящены планиметрии и геометрической алгебре.

В 5-й и 6-й книгах определяются операции над отрезками и строится теория отношений.

Книги 7–9-я посвящены арифметике. Здесь доказывается бесконечность множества простых чисел и приводится алгоритм нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел (алгоритм Евклида).

В 10-й книге дается классификация квадратичных иррациональностей.

Книги 11–13-я посвящены стереометрии. Здесь устанавливаются свойства взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, вычисляются объемы и площади поверхностей, изучаются правильные многогранники.

По легенде, царь Птолемей спросил Евклида, нет ли более короткого пути для изучения геометрии, чем штудирование «Начал». Тот ответил, что в геометрии нет царского пути.

Его труд «Начала» соединил все математические знания, накопленные к тому времени греческими математиками. Однако Евклид не только изложил математические факты, но и положил начало развитию математики как дедуктивной науки, то есть такой науки, которая, отправляясь от небольшого числа бесспорных утверждений (постулатов или аксиом), получает новые утверждения, опираясь на строгие правила логики. Главный труд Евклида начинается геометрией. Он излагает ее аксиоматическим методом. Начинает с постулатов (аксиом), из которых самым знаменитым является «пятый постулат»: «Через точку вне прямой можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну». Дает описание алгоритма нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Теория делимости, развитая в этой книге, стала фундаментом теории чисел. Самая ранняя рукопись «Начал» датируется X веком. Латинский текст «Начал» известен с XII века.

Алгоритм Евклида. Так называют алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (*НОД*) двух целых чисел. Алгоритм Евклида одна из первых числовых конструкций: представление наибольшего делителя d двух чисел – a и b в виде их линейной комбинации: $d = ma + nb$.

Алгоритм работает так: одно из данных чисел делим на другое с остатком, затем второе из чисел делим на первый остаток… Продолжая данный алгоритм, на каждом очередном шаге берем последний остаток и делим на него остаток, полученный на предыдущем шаге. Когда-нибудь этот процесс оборвется (кстати, почему?). Это значит, что последний остаток и есть *НОД*!

Пример. Найдем *НОД* для чисел 119 и 35.

$119 = 3 \cdot 35 + 14;$

$35 = 2 \cdot 14 + 7;$

$14 = 2 \cdot 7;$

$7 = НОД\ (35, 119);$

$7 = 35 - 2 \cdot 14 = 35 - 2(119 - 3 \cdot 35);$

$7 = 7 \cdot 35 - 2 \cdot 119.$

Теперь легко понять, что если $d = НОД\ (a, b)$, то, «раскручивая» этот алгоритм в обратном направлении, можно найти целые числа m и n, следовательно, $d = ma + nb$.

С помощью алгоритма Евклида нетрудно дать ответ на обсуждавшийся ранее вопрос: какие пары чисел можно связать друг с другом перечисленными преобразованиями, а какие нет? Преобразование пар очень похоже на алгоритм Евклида: пусть $m = k \cdot n + r$ ($r < m$). Применяя k раз преобразование 2, из пары (m, n) получим пару (r, n), а затем, применив операцию 3, получим (n, r). В конце концов мы придем к паре (0, d), где d = *НОД* (m, n). Таким образом, из пары (m, n) можно получить пару (p, q) только тогда, когда *НОД* (m, n) = *НОД* (p, q). В частности, из пары (19, 98) можно получить пару (0, 1), а уже из нее любую пару (p, q) с взаимно простыми числами p и q.

Задачи с решением

1. Яйцо варится 9 минут. Как отсчитать это время с помощью двух песочных часов по 5 и 7 минут?

Решение:

Пускаем одновременно те и другие часы. Через 5 минут (когда кончится песок в пятиминутных часах) начинаем варить яйцо. Через 2 минуты кончится песок в семиминутных часах; перевернем их. Когда песок в них опять кончится, яйцо будет готово.

Можно поступить по-другому: начать варку яйца одновременно с запуском тех и других часов. Через 5 минут маленькие часы переворачивают, а спустя 2 минуты (когда большие станут пустыми) их переворачивают снова.

2. В стоэтажном доме установлен лифт, в котором действуют лишь две кнопки. Если нажать на первую кнопку, то лифт поднимется на семь этажей вверх; если нажать на вторую кнопку, то лифт опустится на девять этажей вниз. Можно ли, пользуясь этим лифтом, попасть с 1-го этажа на 72-й?

Решение:

14 раз используем кнопку $+7$: $1 + 14 \cdot 7 = 99$;

3 раза используем кнопку -9: $99 - 27 = 72$.

3. Автомат выполняет две операции: возводит данное число в куб или делит данное число на 8. Можно ли, начиная с числа 2, получить на этом автомате числа: а) 64; б) 2^{2003}; в) 2^{2004}.

Решение:

а) Можно. $64 = (2^3)^3 : 8$.

б) 2^{2003} получить нельзя. Когда впервые будет применена операция возведения в куб, показатель степени станет кратным 3. Очевидно, все дальнейшие операции (умножение показателя на три или вычитание 3 из показателя) сохранят делимость показателя на 3. Но 2003 не кратно трем!

в) Можно (как и любую степень двойки с показателем, кратным 3).

4. ***Задания олимпиады «Кенгуру»***

» Известно, что $12345679 \cdot 9 = 111111111$, $12345679 \cdot 18 = 222222222$. Чему равно $12345679 \cdot 36$?

(A) 111111111; (B) 333333333; (C) 123456789; (D) 363636363; (E) 444444444.

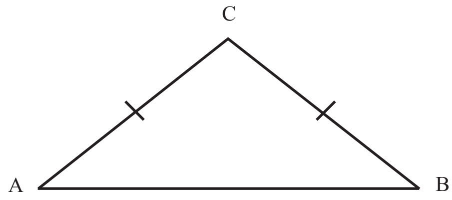
Ответ: Е.

» Во сколько раз увеличивается двузначное число, если справа к нему приписать такое же число?

(A) 10; (B) 11; (C) 99; (D) 100; (E) 101.

Ответ: Е.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 38°$, $AC = CB$. Найдите $\angle C$.



6. ***Проект «Исследуем последнюю цифру степени»***

Если мы перемножаем два целых числа, то, чтобы найти последнюю цифру произведения, можно просто перемножить последние цифры множителей (это станет очевидно, если записать столбиком умножение чисел). Аналогичное правило верно и для степеней. Допустим, что мы хотим узнать последнюю цифру степени какого-либо числа, например 3^{100}. Для этого не надо считать данную степень. Достаточно при вычислениях оставлять только последнюю цифру:

$3^1 = 3$ $\quad 3^5 = 3^4 \cdot 3^1 = 81 \cdot 3 = ...3$

$3^2 = 9$ $\quad 3^6 = 3^4 \cdot 3^2 = 81 \cdot 9 = ...9$

$3^3 = 27$ $\quad 3^7 = 3^4 \cdot 3^3 = 81 \cdot 27 = ...7$

$3^4 = 81$ $\quad 3^8 = 3^4 \cdot 3^4 = 81 \cdot 81 = ...1$

Последняя цифра степени числа 3 стала повторяться периодически (через четыре шага).

Определите последнюю цифру числа.

	…7	…9	…3	…1
7^1				
7^2				
7^3				
7^4				
7^5				
7^6				
7^7				
7^8				

	…7	…9	…3	…1
7^{100}				
7^{101}				
7^{102}				
7^{121}				
7^{4k}				
7^{4k+2}				
7^{4k+1}				
7^{4k+3}				

а) Докажите, что $7^{2001} - 7^{129}$ делится на 10.

б) Сформулируйте условие, при котором степени 7^{a} и 7^{b} оканчиваются на одну и ту же цифру.

в) Проверьте, что это условие выполняется для $a = 7^3$ и $b = 7$.

г) Докажите, что $7^7 - 3$ делится на 10.

д) Найдите последнюю цифру числа 43^{43}.

е) Докажите, что $7^{7^7} - 7^7$ делится на 10.

ж) Докажите, что $43^{43} - 17^{17}$ делится на 10.

Задания для самостоятельной работы

1. Пользуясь «правилом последней цифры», выпишите последнюю цифру каждого из чисел:

А) 3^{100} Б) 3^{1999} В) $(3^{157})^4$ Г) $3^{2^{100}}$ Д) 3^{3^3} Е) 4^{999} Ж) 7^8 З) $7^{2^{100}}$ И) 7^{7^7}.

2. Примем, что на площади 1 м^2 могут поместиться 4 человека. Поместится ли все население Санкт-Петербурга (5 миллионов человек) на квадратной площади, сторона которой равна 1,2 км?

3. С начала совместного путешествия за одну минуту Дуремар 6 раз охал, а черепаха Тортила 15 раз вздыхала (через равные промежутки времени). Через сколько секунд совпадали «ох» Дуремара и «вздох» Тортилы?

Ответ: 20.

4. Можно ли выписать в строчку натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы разность каждых двух соседних (из большего вычитают меньшее) была не меньше 50?

Ответ: можно. Например: 50, 100, 49, 99, 48, 98, 47, 97… 2, 52, 1, 51.

5. В клетках квадрата 3×3 расставьте девять различных натуральных чисел так, чтобы в любом столбце, в любой строке и в любой из двух диагоналей произведения чисел были одинаковы.

Ответ: предлагаем один из вариантов.

12	9	2
1	6	36
18	4	3

6. Расставьте степени числа a: a, a^2, a^3... a^9 – в таблице 3×3 так, чтобы произведения степеней, стоящих в каждой строчке (в каждом столбце), были равны между собой.

1.2. Сравнение чисел

«*Citius, altius, fortius!*» («Быстрее, выше, сильнее») – этот олимпийский девиз призывает спортсменов пробежать быстрее, прыгнуть выше, оказаться сильнее других. Человек сравнивает, определяет, что больше, не только на соревнованиях. Время и расстояние, скорость и температура, вес и объем, энергия и плотность – все эти величины можно измерить. Сравнивая меры одной и той же величины, можно определить, какая из них больше другой. Имеется универсальный способ измерения скалярных величин: выбрав масштаб, мы измерим значение этой величины с помощью числа. Теперь сравнение значений величины приводит нас к сравнению чисел.

Важнейшее свойство отношения неравенства между числами – его транзитивность: $a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$. Если вам нужно доказать неравенство $a < c$, постарайтесь найти такое число b, чтобы были очевидны два неравенства: $a < b$ и $b < c$. Тогда с помощью транзитивности вы получите требуемое неравенство $a < c$.

Задачи с решением

1. ***Старинная русская задача.*** Шли 7 старцев. У каждого старца по 7 костылей. На каждом костыле по 7 сучков. На каждом сучке по 7 кошелей. В каждом кошеле по 7 пирогов. В каждом пироге по 7 воробьев. Сколько было всех?

Ответ: 137256.

2. Используя степени, запишите возможно большее число:

а) тремя единицами;

б) тремя двойками;

в) тремя тройками;

г) тремя четверками;

д) тремя пятерками.

3. Определите, что больше: 3^{400} или 4^{300}?

Преобразуем степени:

$3^{400} = (3^4)^{100} \Rightarrow 3^{400} = 81^{100}$.

$4^{300} = (4^3)^{100} \Rightarrow 4^{300} = 64^{100}$.

$81 > 64 \Rightarrow 81^{100} > 64^{100} \Rightarrow 3^{400} > 4^{300}$.

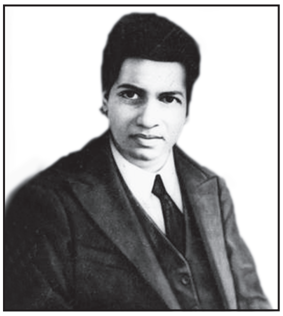
4. Доказать, что $\pi^{12} < 2^{21}$.

Какие «хорошие» числа можно использовать для вычислений?

Например, ясно, что $\pi^2 < 10$, а тогда $\pi^4 < 100$. С другой стороны, $2^{21} = (2^7)^3$ и $2^7 = 128 > 100$. Итак, $\pi^{12} = (\pi^4)^3 < 100^3 < 128^3 = 2^{21}$. Следовательно, $\pi^{12} < 2^{21}$. Кроме свойств неравенств, для решения таких задач нужно иметь запас «любимых» чисел (например, без вычислений помнить, что $\pi^2 < 10$, а $2^7 > 100$ и $2^{10} > 1000$). Чем больше вы будете решать задач, тем больше у вас будет любимых чисел. Например, у индийского математика Рамануджана было очень много любимых натуральных чисел. Он их воспринимал как близких друзей и мог рассказать о каждом из них много неочевидных вещей.

Страничка истории

РАМАНУДЖАН



С. Рамануджан родился в 1887 году в Индии. Он был наделен фантастической интуицией. В дневниках, которые он вел до последнего дня своей жизни, находят формулы потрясающей глубины и сложности без единого доказательства.

Выдающийся английский математик Харди в 1913 году получил от Рамануджана письмо, тогда совершенно неизвестного. Письмо это представляло собой лист с 120 формулами. Небольшая часть этих формул была известна Харди, но он не знал, как получена их большая часть. Харди сказал тогда: «Эти формулы верны. Если это не так, то ни у кого в мире не хватит воображения их придумать». Он пригласил Рамануджана в Англию, где они проработали вместе пять лет. Результатом их сотрудничества стала серия работ об арифметических функциях. Их важность сохранилась до наших дней.

Не имея специального математического образования, Рамануджан получал замечательные результаты в области теории чисел. Он становится профессором кембриджского университета.

Он был зачарован числом π, и можно подумать, что он вывел большинство своих формул, чтобы получить приближения этого числа. Благодаря формулам сегодня стало возможным достаточно быстро вычислить 2 000 000 знаков после запятой в записи числа π.

π – одна из знаменитых величин. π – площадь круга радиуса 1, $\pi = 3{,}1415926536\ldots$

Формула Рамануджана: $$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4\,396^{4n}}.$$

Однажды Харди навестил Рамануджана в госпитале и в ходе разговора заметил, что номер такси, на котором он приехал – 1729, – показался ему мало интересным. «Напротив, – ответил Рамануджан, – это число замечательное, это самое маленькое целое число, которое можно представить как сумму кубов двух целых чисел двумя различными способами: $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$». Он обладал паразительной способностью подмечать огромный числовой материал. Однако не знал самого маленького числа, представимого двумя различными способами в виде суммы четвертых степеней, тогда как разложение $635318657 = 158^4 + 59^4 = 133^4 + 134^4$ было известно еще Эйлеру.

Заболев в английском климате, Рамануджан вернулся в Индию, где и умер в 1920 году в возрасте 32 лет.

5. Число 641 можно представить как $625 + 16 = 5^4 + 2^4$. Найдите все натуральные числа, меньшие тысячи и представимые в виде $a^4 + b^4$, где a и b – натуральные числа.

6. Какое из чисел больше − А или В?

№ п/п	A	B
1	2^{20}	1000000
2	31^{16}	17^{20}
3	3^{200}	2^{300}
4	4^{53}	5^{45}
5	3^{100}	2^{159}
6	3^{100}	2^{158}

Решение:

1) $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3 \Rightarrow 2^{20} > 10^6$.

2) $31^{16} < 32^{16} = (2^5)^{16} = 2^{80} = 2^{4\cdot 20} = 16^{20} < 17^{20}$.

3) $2^3 = 8 < 9 = 3^2 \Rightarrow (2^3)^{100} < (3^2)^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$.

4) $4^{53} = 2^{106} = 2 \cdot 2^{105} = 2 \cdot 2^{7\cdot 15} = 2 \cdot 128^{15}$.

$5^{45} = 5^{3\cdot 15} = 125^{15} < 128^{15} \Rightarrow 5^{45} < 2 \cdot 128^{15} = 4^{53}$.

5) $3^{12} = 531\,441 < 2^{19} = 554\,288$.

Откуда $3^{96} < 2^{152}$ и $3^4 = 81 < 2^7 = 128$.

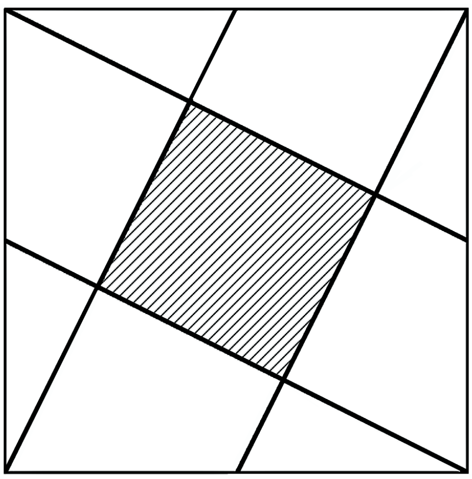
Тогда $3^{100} = 3^{96} \cdot 3^4 < 2^{152} \cdot 2^7 = 2^{159}$.

6) Имеем $3^7 = 2187$, а $2^{11} + 2^7 = 2048 + 128 = 2176$.

Тогда $3^{7\cdot 14} > (2^{11} + 2^7)^{14} > 2^{11\cdot 14} + 14 \cdot 2^{11\cdot 13} \cdot 2^7 = 2^{154} + 7 \cdot 2^{151} = 2^{151} \cdot (2^3 + 7) = 15 \cdot 2^{151}$.

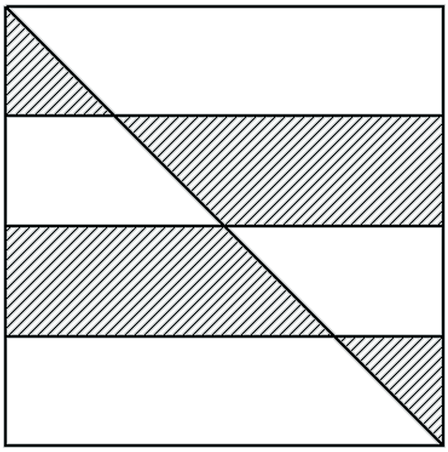
Получаем $3^{100} = 9 \cdot 3^{98} > 2^{151} \cdot 9 \cdot 15 = 2^{151} \cdot 135 > 2^{151} \cdot 2^7 = 2^{158}$.

7. Площадь большого квадрата равна 1 м^2. Найдите площадь заштрихованного квадратика.



Ответ: $\frac{1}{5}$.

8. В квадрате, разделенном на четыре равные полоски, проведена диагональ. Чему равна площадь фигуры, закрашенной на рисунке, если сторона квадрата равна 1 м?



Ответ: $\frac{3}{8}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Сравните следующие числа:

№ п/п	A	B
1	2^4	4^2
2	5^3	3^5
3	$\frac{1}{2^{10}}$	$\frac{1}{10^3}$
4	10^{100}	100^{10}
5	31^{16}	17^{20}
6	4^{53}	5^{45}

2. Карлсон написал дробь $\frac{10}{97}$. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно; 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Сможет ли Малыш с помощью данных действий получить дробь: а) равную $\frac{1}{2}$; б) равную 1?

Решение:

а) Да, достаточно прибавить к числителю и знаменателю по 77.

б) Действительно, дробь равна единице, если ее числитель и знаменатель равны. А Малыш никак не сможет из неравных чисел сделать равные.

3. Числитель и знаменатель дроби – целые положительные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит $\frac{1}{3}$. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

Решение:

Сумма числителя и знаменателя равна 101. Значит, чем больше числитель дроби, тем меньше ее знаменатель – и тем больше сама дробь (так как и числитель и знаменатель – положительные числа). Видно, что $\frac{25}{76}$ еще меньше $\frac{1}{3}$, а $\frac{26}{75}$ – уже больше.

4. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1. Например:

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}.$$

Один из знаменателей здесь заменен буквой x. Найдите этот знаменатель.

Решение:

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{73}-\frac{1}{219}-\frac{1}{292}-\frac{1}{60}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{73}-\frac{1}{73\cdot 3}-\frac{1}{73\cdot 4}-\frac{1}{60}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{17}{73\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{5\cdot 3\cdot 4}$$

$$\frac{17\cdot 5-73}{73\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{73\cdot 5}=\frac{1}{x},\ x=365.$$

5. Найдите хотя бы две пары натуральных чисел, для которых верно равенство $2x^3=y^4$.

Решение:

Заметим, что $x=2$, $y=2$ – частное решение.

Попробуем найти еще одно в виде $x=2^k$, $y=2^n$, подобрав подходящие k и n.

Имеем: $2\cdot(2^k)^3=(2^n)^4$ или $2^{3k+1}=2^{4n}$. Осталось подобрать k и n так, чтобы было выполнено равенство $3k+1=4n$. Ну, а это уже совсем просто. Например: $k=5$, $n=4$, соответственно, $x=32$, $y=16$.

1.3. Графы

Знакомство с графами. Степень вершины

1. В деревне 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор – Диме и Никите, Евгений – сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Петр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Решение:

Выпишем имена мальчиков и соединим соседей линиями:

Сергей – Максим – Иван – Петр – Антон

Дима – Виктор – Никита – Евгений

Ответ: нет, не может.

» Основная идея, которую нужно продемонстрировать при обсуждении данной задачи: рисунок помогает решению.

2. В трех вершинах пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

Решение:

Заметим, что диагонали пятиугольника образуют один замкнутый цикл. Представим себе, что фишки – это пуговицы, нанизанные на нитку. Ясно, что если двигать пуговицы по нитке, то поменять местами две пуговицы нельзя.

Ответ: нет, нельзя.

Этот пример повторяет ту же идею: изобразить ситуацию из условия задачи на рисунке, но демонстрирует более изощренные рассуждения.

3. Можно ли выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих цифр делилась либо на 5, либо на 7, либо на 13?

Решение:

За вершины примем цифры 0, 1, 2… 9. Если сумма двух рядом стоящих цифр делится на 5, либо на 7, либо на 13, то соединим соответствующие вершины ребром. Получим граф.

Теперь несложно получить одно из возможных нужных расположений цифр: 0–7–3–4–6–1–9–5–2–8.

Ответ: нет, нельзя.

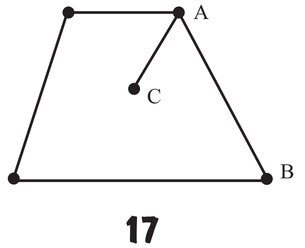
Графом называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются **вершинами** графа, а соединяющие линии – **ребрами** (каждое ребро соединяет ровно две вершины). Примерами графов могут служить: любая карта дорог, схема метро, электросхема, чертеж прямоугольника и т. д.

Здесь стоит нарисовать несколько примеров графов, обратить внимание на то, что граф может быть несвязным (состоять из нескольких «частей»), которые называют компонентами связности, и даже могут присутствовать вершины, из которых не исходит ни одного ребра (изолированные вершины).

Как правило, графы, у которых вершина соединена ребром сама с собой, и графы, в которых пара вершин соединена несколькими ребрами, не рассматриваются, хотя иногда такие графы также бывают нужны.

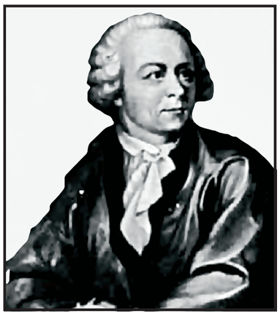
Полезно также представить граф как набор пуговиц, некоторые из которых соединены нитями. При этом, где именно расположены пуговицы и как проходят нити – не важно: граф от этого не меняется, важно лишь то, какие пары пуговиц соединены нитями.

Степенью (или порядком) вершины называется количество ребер, исходящих из этой вершины. Вершина называется четной, если из нее выходит четное число ребер, и нечетной, если из нее выходит нечетное число ребер. Так, например, в графе, изображенном на рисунке, вершина A имеет степень 3, вершина B – степень 2, вершина C – степень 1.



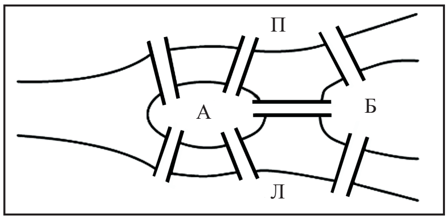
Страничка истории

ЭЙЛЕР



Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский, немецкий и российский математик, внесший значительный вклад в развитие математики, механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Автор более 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. Почти полжизни провел в России и внес существенный вклад в становление российской науки. В 1726 году он был приглашен работать в Санкт-Петербург. С 1731 по 1741, а также с 1766 года был академиком Петербургской академии наук (в 1741–1766 годах работал в Берлине, оставаясь одновременно почетным членом Петербургской академии). Хорошо знал русский язык и часть своих сочинений (особенно учебники) публиковал на русском. Первые русские академики-математики и астрономы были учениками Эйлера. Некоторые из его потомков до сих пор живут в России.

Датой рождения теории графов принято считать 1736 год, когда Л. Эйлер решил задачу о кенигсбергских мостах. Рукава реки Прегель, на берегах которой расположен Кенигсберг, образовали два острова. В ту эпоху четыре образовавшихся участка суши (правый и левый берега и два острова) соединяло семь мостов так, как это показано на рисунке.



Горожане, гуляя по городу, пытались так построить маршрут, чтобы он проходил по каждому мосту ровно один раз. Это им не удавалось, а Эйлер доказал, что это принципиально невозможно.

Эйлер изобразил участки суши точками, а мосты – дугами, соединяющими эти точки. Так получилась картина, которая и получила название графа. Термины, введенные Эйлером, сведем вместе.

Граф – это набор точек и дуг, соединяющих эти точки.

Вершина – точка.

Ребро – дуга, отрезок, соединяющий две вершины.

Ориентированный граф – граф, в котором на каждом ребре указано направление движения (улицы с односторонним движением).

Путь – последовательность вершин и соединяющих их ребер, которые могут быть пройдены одно за другим без «прыжков» (разрывов). Если путь осуществляется в ориентированном графе, то двигаться по ребрам можно только в указанном на этих ребрах направлении.

Цикл – замкнутый путь.

Степень вершины – число ребер, соединяющих эту вершину с другими вершинами. В ориентированном графе считаются все ребра, как входящие в эту вершину, так и исходящие из нее.

Связный граф – граф, в котором любые две вершины соединены путем.

Полный граф – граф, в котором любые две вершины соединены ребром.

Эйлеров путь – путь в графе, проходящий через каждое ребро ровно по одному разу.

Гамильтонов путь – путь в графе, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

Задача о кенигсбергских мостах на языке теории графов звучит так: существует ли в построенном графе эйлеров путь. К вопросу об эйлеровом пути в графе сводится и такое известное задание: нарисовать картинку, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя линий дважды.

Хорошая постановка задачи и удобный язык для ее описания – это уже половина решения. Правильно сформулировав вопрос, Эйлер смог получить ответ для произвольного графа.

Теорема Эйлера. Для того чтобы в связном графе существовал эйлеров путь, необходимо и достаточно, чтобы в графе было не более двух вершин с нечетными степенями. Если мы сложим вместе степени всех вершин, то получим удвоенное число ребер (мы каждое ребро сосчитаем два раза). Отсюда вытекает важное соображение: «Число вершин нечетной степени всегда четно».

Заметим, что в эйлеровом графе число вершин нечетной степени должно быть 0 или 2.

Будем двигаться по некоторому пути и стирать пройденные ребра (сжигать за собой мосты). Ясно, что при таком прохождении некоторой вершины (не являющейся началом или концом пути) ее степень уменьшается на два. Отсюда вытекает несколько простых следствий.

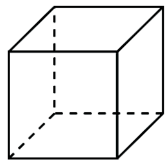
Во-первых, если эйлеров путь существует, то степени всех его промежуточных вершин четны. Это доказывает необходимость в теореме Эйлера – вершины нечетной степени могут быть только концами эйлерова пути.

Во-вторых, если эйлеров путь не замкнут (не является циклом), то есть его начало не совпадает с его концом, то степени начальной и конечной вершины нечетны. Поэтому, пытаясь построить эйлеров путь в графе с двумя вершинами нечетной степени, надо начинать путь в одной из этих вершин.

Наконец, в-третьих, если в графе существует эйлеров цикл, то все его вершины имеют четную степень.

Для завершения доказательства теоремы Эйлера достаточно понять, что будет, если мы (начав с вершины нечетной степени, если их две, или начав с любой вершины, если все они имеют четную степень) начнем двигаться по графу, не заботясь ни о чем – ведь придя в некоторую вершину четной степени, мы всегда из нее выйдем. Ясно, что путь завершится на том, что мы придем в вершину, в которой будет до нашего прихода одно нестертое ребро. Если начальный граф имел две нечетных вершины, то это вторая из них, а если их не было вовсе, то эта та вершина, с которой мы стартовали. К сожалению, такой способ не всегда приводит к цели, так как могут остаться куски графа с непройденными ребрами – мы слишком рано пришли в вершину нечетной степени.

Поступим аналогично в оставшемся куске. Он уже имеет все вершины четной степени. При этом мы можем начать с некоторой вершины, которая входила в первый из построенных путей, так как исходный граф связен. Его можно подсоединить к первому пути в тот момент, когда мы придем в вершину, входящую в этот цикл. Так мы сможем расширить построенный путь и продолжать этот процесс расширения до тех пор, пока не исчерпаем все дуги.

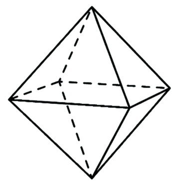


1. Можно ли обойти все ребра куба, пройдя по каждому ребру ровно один раз?

Ответ: нет.

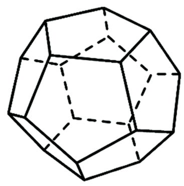
2. Какое наименьшее число ребер куба надо пройти дважды, чтобы обойти все ребра куба?

Ответ: 3.



3. Можно ли обойти все ребра октаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?

Ответ: да.



4. Можно ли обойти все ребра додекаэдра, пройдя по каждому ребру ровно один раз?

Ответ: нет.

Задачи с решением

1. В летний лагерь приехали отдыхать три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из следующих фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Миша – не Герасимов. Отец Володи – инженер. Володя учится в 6-м классе. Герасимов учится в 5-м классе. Отец Иванова – учитель. Какая фамилия у каждого из друзей?

Решение:

Так как Володя учится в 6-м классе, а Герасимов в 5-м классе, то Володя не Герасимов. Так как отец Иванова – учитель, отец Володи – инженер, то Володя – не Иванов. Тогда Володя – Семенов, Миша – Иванов, а Петя – Герасимов.

Для наглядности лучше рисовать графы.

2. Пришел Иван-царевич в подземелье к Кощею Бессмертному освобождать Василису Прекрасную. В подземелье три темницы. В одной из них томится Василиса, в другой расположился Змей Горыныч, а третья темница – пустая. На дверях есть надписи, но все они ложные. На первой темнице написано: «Здесь Василиса Прекрасная»; на второй темнице: «Темница № 3 не пустая»; на третьей темнице написано: «Здесь Змей Горыныч». В какой же темнице Василиса?

Решение:

Василиса Прекрасная не может быть в первой темнице, значит, она во второй или третьей темнице. Так как темница № 3 – пустая, то Василиса Прекрасная будет во второй темнице.

3. Можно ли расположить на плоскости 7 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

Ответ: нет. Количество точек пересечения отрезков было бы равно $7 \cdot 3 : 2$.

4. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Комментарий к решению:

Главная идея: граф не может содержать одну вершину нечетной степени. Действительно, сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер. Тогда эта сумма может содержать только четное число нечетных слагаемых. Если столица и город L имеют разные компоненты связности, то каждая из них есть граф с единственной вершиной нечетной степени.

5. В стране Древляндия 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

Решение:

Если любые два города соединяет один путь, значит, в соответствующем графе нет циклов. Связный граф без циклов называется деревом. Нетрудно проверить, что дерево с n вершинами имеет $(n - 1)$ ребро.

Ответ: 100.

6. На конференции присутствуют 50 ученых, каждый из них знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

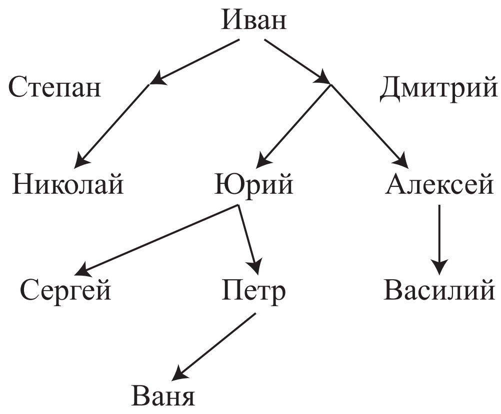
Решение:

Пусть А – произвольный ученый, В и С – двое его знакомых. Докажем, что В и С имеют общего знакомого Д, отличного от А. Предположим, что всякий знакомый В (кроме А) незнаком с С. У В и С по 24 знакомых, не считая А. Тогда всего получается 24 + 24 + 1 + 2 = 51 человек (знакомые В (без А), знакомые С, А; В и С).

Итак, у В и С есть общий знакомый Д, Д ≠ А. Очевидно, что четверку А, В, С, Д можно посадить за столом так, как требуется.

7. ***Задания олимпиады «Кенгуру»***

» Ваня рассматривает свое генеалогическое древо, где отмечены одни мужчины. Стрелка идет от отца к сыну.



Как звали сына брата деда брата отца Вани?

(A) Юрий; (B) Василий; (C) Дмитрий; (D) Николай; (E) другой ответ.

Ответ: D.

» Пять джентльменов – A, B, C, Д и E встретились в клубе. Некоторые из них приветствовали друг друга рукопожатиями, причем A и B пожали руки по одному разу, а C, Д и E – по два. Известно, что A пожал руку E. Какого рукопожатия наверняка не было?

(A) C и Д; (B) C и E; (C) B и C; (D) B и Д; (E) B и E.

Ответ: E.

Задачи для самостоятельной работы

1. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня – 50 кг, Маня и Ваня – 90 кг, Ваня и Даня – 100 кг, Даня и Аня – 60 кг. Сколько весит Аня?

Решение:

Обозначим вес Ани буквой a. Тогда Таня весит $t = 40 - a$ кг. Маня – $m = 50 - (40 - a) = 10 + a$ кг и т. д. Значит, Аня весит 20 кг.

2. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого купца, то соберут 90 рублей, без второго – 85 рублей, без третьего – 80 рублей, без четвертого – 75 рублей. Сколько у кого денег?

Решение:

Всего у купцов было (90 + 85 + 80 + 75) : 3 = 110 руб. Поэтому у первого купца 110 − 90 = 20 руб., у второго 110 − 85 = 25 руб., у третьего купца 110 − 80 = 30 руб., а у четвертого 110 − 75 = 35 руб.

3. Пешеход обошел шесть улиц города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

Решение:

Рассмотрим шесть улиц, выходящих из центра города в разных направлениях (то есть шесть отрезков с общим началом и без других общих точек). Пешеход может, выйдя из центра, пройти каждую улицу туда–обратно. Но очевидно, пройти по каждой улице ровно один раз невозможно.

Можно привести пример и без тупиков: возьмем треугольник, отметим в нем точку и соединим ее с вершинами. Попробуйте сами доказать, что пешеход не сможет обойти эти улицы, пройдя каждую по одному разу.

Подсказка (теорема Эйлера): пусть пешеход смог обойти все улицы некоторого города, пройдя каждую ровно по одному разу. Тогда на каждом перекрестке, кроме, быть может, того, с которого он начал, и того, на котором закончил, сходится четное число улиц. Попробуйте доказать это сами!

4. В спортклубе тренируются 100 толстяков весом до 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

Решение:

Заметим, что наличие толстяков одинакового веса упрощает задачу. Действительно, с каждым толстяком можно поместить в команду всех толстяков того же веса. При этом условие задачи по-прежнему будет выполнено. Значит, можно считать, что все 100 толстяков разного веса.

В частности, у каждого толстяка есть не более одного товарища, который вдвое легче его, и не более одного, который вдвое тяжелее его.

Теперь заставим наших толстяков взяться за руки: каждый из них подаст левую руку тому, который двое тяжелее его (если такой есть), а правую – тому, который вдвое легче его (если такой есть). Получится, что вся сотня разобьется на непересекающиеся «цепочки». Причем в каждой цепочке правый – это самый легкий, а левый – это самый тяжелый.

Раскрасим каждую цепочку в два цвета в шахматном порядке, начиная с самого легкого. Теперь сформируем две искомые команды по «цветному» признаку.

5. Резидент иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

Решение:

Под каждым двусторонним соглашением между республиками стоят две подписи руководителей каждой из них. Значит, общее число подписей под всеми соглашениями – четное. С другой стороны, руководитель каждой из республик поставил подпись ровно под тремя соглашениями. А всего республик 15. Значит, всего подписей 45. Противоречие.

Ответ: нет.

1.4. Принцип Дирихле

Принцип, о котором пойдет речь в данной теме, широко известен. Во Франции его называют принципом ящиков, в России – принципом Дирихле, в Англии – Pigeon-Hole Principle, в Германии – Zerlegunggesetz.

Во всех случаях речь идет о почти очевидном рассуждении, которое относится скорее к обычной логике, а не к ее математической части. В самом деле, очевидно ли, что если в пяти клетках сидят шесть кроликов, то, по крайней мере, в одной клетке сидит не менее двух кроликов?

А теперь посмотрите на список аналогичных высказываний:

а) В мешке лежит 10 различных пар обуви. Если из мешка вытащили не менее 11 ботинок, то среди них можно выбрать хотя бы одну пару.

б) В лесу более 1000 деревьев. На каждом дереве не более 99 веток, следовательно, найдется по крайней мере 11 деревьев с одинаковым количеством веток.

в) На доске записано 101 целое число. По крайней мере, у 11 из них последняя цифра одинакова.

Все эти утверждения построены по одному и тому же правилу: **некоторое количество предметов разложено по *k* ящикам. Если общее число предметов строго больше, чем *nk*, то хотя бы в одном ящике находится строго больше, чем *n* предметов.**

Для многих из вас это правило кажется очевидным и не нуждающимся в доказательстве. Заметим, что если число предметов бесконечно, а число ящиков конечно, тогда, согласно принципу Дирихле, имеется, по крайней мере, один ящик, содержащий более одного объекта (имеется даже ящик, который содержит бесконечное количество предметов).

Непосредственное применение принципа Дирихле не представляет большого труда. Надо лишь разобраться, какие предметы играют роль кроликов, а какие – роль клеток (ящиков), в которые сажают кроликов. Очень часто роль клетки играет какое-либо свойство предмета. В трех примерах, приведенных выше, это свойство очевидно: в первом примере – это принадлежность ботинок определенной паре, во втором – наличие определенного количества веток, в третьем – наличие определенной цифры в десятичной записи.

Задачи с решением

1. За круглым столом сидят 49 женщин и 51 мужчина. Докажите, что хотя бы двое мужчин сидят напротив друг друга.

Решение:

Если напротив каждого мужчины сидит женщина, тогда женщин не может быть меньше мужчин.

2. В доме живут пять кошек. У них 16 котят. Докажите, что хотя бы у одной из них не менее n котят.

Решение:

Если у каждой кошки не больше трех котят, то общее число котят не превосходит 15. Следовательно, $n = 4$.

3. В коробке лежат конфеты трех сортов. Карлсон съел 14 конфет. Докажите, что среди них было по крайней мере n одинаковых.

Решение:

Только если Карлсон ест не больше четырех конфет каждого сорта, он сможет съесть не больше 12 конфет. $n = 5$.

4. Костя Сергеев из 9 А класса и восемь его друзей из той же школы отправились в поход. Оказалось, что среди любых четырех из этих туристов обязательно есть одноклассники, а среди любых пяти – не больше чем три одноклассника. Сколько учеников 9 А класса пошли в поход?

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 1; (E) невозможно определить.

Ответ: B.

5. Молодые кенгуру соревнуются в прыжках, причем каждое животное прыгает пять раз. Судьи оценивают красоту каждого прыжка в баллах – от 1 до 20, но в окончательном подсчете участнику засчитывают только четыре его лучших прыжка. За пять прыжков кенгуру Джо набрал 72 балла. Какой наименьший результат может получиться у него при окончательном подсчете?

(A) 52; (B) 54; (C) 57; (D) 58; (E) 72.

Ответ: D.

6. Во дворе бегают 14 кошек и котят. Каждая кошка-мама вывела на прогулку не меньше двух своих котят. Каким может быть наибольшее количество кошек-мам?

(A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

Ответ: B.

7. В темном чулане стоит 20 банок. Из них: восемь с клубничным вареньем, семь – с малиновым и пять – с клюквенным. Какое наибольшее число банок можно взять (не зажигая света), так чтобы там наверняка осталось по крайней мере четыре банки одного варенья и три банки другого?

(A) 5; (B) 9; (C) 6; (D) 7; (E) 8.

Ответ: D.

8. В сумке у кенгуру три белых, два черных и пять серых носков. Кенгуру хочет, не заглядывая в сумку, наверняка взять два носка одного цвета. Какое наименьшее число носков придется вытащить кенгуру из сумки?

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 7; (E) 10.

Ответ: C.

9. Докажите, что в Париже хотя бы у двух человек одинаковое число знакомых парижан.

Решение:

Число возможностей – это число парижан (n), но возможности 0 (не знаем никого) и $n - 1$ (знаем всех) не могут одновременно иметь место.

Задания для самостоятельной работы

1. В школе 400 учащихся. Докажите, что среди учеников этой школы найдутся хотя бы 2 ученика, отмечающие свое рождение в один и тот же день.

Решение:

Так как в году не больше 366 дней (число клеток), а в школе учатся 400 учащихся (число кроликов), то, согласно принципу Дирихле, обязательно найдутся по крайней мере 2 ученика, отмечающие свое рождение в один и тот же день.

2. В 300 ящиках упакованы апельсины. Известно, что один ящик может вместить не более 120 апельсинов. Докажите, что имеются по крайней мере 3 ящика с одинаковым числом апельсинов.

Решение:

Распределим ящики по группам. К первой группе отнесем ящики, в которых нет апельсинов; ко второй группе – ящики с одним апельсином и т. д.; в последней группе будут ящики, в которых находится 120 апельсинов. Получили 121 группу. В самом крайнем случае пусть в каждой группе находится по 2 ящика, тогда будем иметь 242 ящика. Но по условию задачи имеется 300 ящиков. Теперь, согласно принципу Дирихле, найдется группа, в которой будет 3 ящика.

3. В ящике лежали вперемешку 6 белых и 10 голубых носков. Какое наименьшее число носков надо взять из ящика, не заглядывая в него, чтобы иметь не менее пары носков одного цвета?

Ответ: достаточно взять 3 носка.

4. В хвойном лесу 800 000 елей, и на каждой из них не более 500 000 игл. Докажите, что в этом лесу растет не менее двух елей с одинаковым числом игл.

Решение:

Распределим ели по группам:

1-я группа – ели, не имеющие игл;

2-я группа – ели с одной иглой,

и т. д.

Последняя группа – ели с 500 000 игл.

Таким образом, число елей в лесу превышает число групп. Следовательно, согласно принципу Дирихле, найдется по крайней мере 2 ели с одинаковым числом игл.

5. Три землекопа за три часа выкопали три ямы. Сколько выкопают шесть землекопов за пять часов?

Решение:

Три землекопа за 3 часа выкопали 3 ямы, значит, шесть землекопов за 3 часа выкопают в 2 раза больше, то есть 6 ям. А шесть землекопов за 5 часов еще в $^5/_3$ раза больше, то есть 10 ям.

6. В январе на 1 доллар можно было купить 40 винтиков или 60 шпунтиков. В феврале винтики и шпунтики стали продавать наборами из 25 винтиков и 25 шпунтиков по цене 1 доллар за набор. Для сборки трактора необходимо 600 винтиков и 600 шпунтиков. В каком месяце сборка трактора стоила дороже, если другие затраты не изменились?

Решение:

В январе надо было потратить 10 долларов на 600 шпунтиков и 15 долларов на 600 винтиков, то есть всего 25 долларов. В феврале надо купить 24 набора из 25 винтиков и 25 шпунтиков. Значит, в январе сборка трактора стоит на 1 доллар дороже.

7. Сократите дробь: $\frac{5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}}{5^{24}}$.

Решение:

Преобразуя числитель к выражению 5^{22} и сокращая дробь на 5^{22}, получим $\frac{1}{25}$.

Примерные задания для устных упражнений

1. В семье пять братьев. У каждого из них есть одна сестра. Сколько всего детей в семье?

Ответ: 6.

2. В темной кладовой в беспорядке лежат ботинки: 10 пар черных и 10 пар коричневых. Сколько ботинок надо взять, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета? (В темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого.)

Решение:

Выстроим ботинки парами. Тогда всего будет 20 пар. Взяв 21 ботинок, мы обязательно возьмем два ботинка из какой-то пары, то есть всю ее целиком.

Ответ: 21.

3. У Акулины и Анфисы денег поровну. Сколько денег должна дать одна из них другой, чтобы у Анфисы стало на 10 рублей больше, чем у Акулины?

Комментарий к решению: 5 рублей. Распространенный неправильный ответ – 10 рублей. Допустим, что у них, скажем, по 50 рублей. Если Акулина даст 10 рублей, то у Анфисы окажется 60 рублей, а у Акулины – 40 рублей. Следовательно, разница составит не 10 рублей, а 20 рублей.

Ответ: 5 рублей.

4. В классе число отсутствующих учеников составляло $\frac{1}{6}$ часть числа присутствующих. Когда из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

Комментарий к решению:

Изначально присутствующих было в 6 раз больше, чем отсутствующих, то есть отсутствующие составляли $\frac{1}{7}$ часть числа всех учащихся. После того как из класса вышел один ученик, отсутствующие составили $\frac{1}{6}$ часть от общего числа учащихся. Значит, один ученик составляет $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$ часть класса.

Ответ: в классе 42 ученика.

5. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20 % больше, чем Алик, но на 20 % меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

Комментарий к решению:

Боря собрал грибов на 20 % больше, чем Алик. Значит, Боря собрал в 1,2 раза больше грибов, чем Алик. Поскольку Боря собрал на 20 % меньше грибов, чем Вася, значит, Боря собрал 0,8 от собранного Васей количества грибов, то есть Вася собрал в 1 : 0,8 = 1,25 раза больше, чем Боря. Учитывая, что Боря собрал в 1,2 раза больше, чем Алик, заключаем: Вася собрал грибов в 1,2 · 1,25 = 1,5 раза больше, чем Алик.

Ответ: на 50 %.

6. На какое наименьшее число частей надо разрезать торт, чтобы его можно было раздать поровну как троим, так и четверым?

Комментарий к решению:

Разобьем отрезок на 12 равных частей. Сверху нарисуем дуги, разбивающие его на 3 равные части, а снизу – на 4. В результате отрезок разделился на кусочки длиной 3, 1, 2, 2, 1 и 3. Следовательно, пирог достаточно разрезать на шесть частей: $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}$.

Если же пирог разрезать на 5 частей, то при разделе «на троих» кому-то достанется лишь одна часть. Она будет составлять $\frac{1}{3}$ пирога, что не позволит разделить его на четверых.

Ответ: 6.

1.5. Масштаб и объем

Знакомство с понятием размерности стоит начать с «клетчатого» варианта, в котором любое соображение можно проверить прямым подсчетом. Начать можно со следующей известной задачи, которую часто решают неправильно.

Задача 1

После семи стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько еще стирок хватит оставшегося куска? (На каждую стирку уходит одно и то же количество мыла).

Комментарий к решению:

На этот вопрос часто дают ответ «еще на 7 стирок». Убедиться в его ошибочности можно, задумавшись над следующим вопросом: если всего куска хватает на 14 стирок, а маленького – на 7, то, наверное, из двух маленьких кусков можно сложить один большой, но как же это сделать?

Если представить себе трехмерную ситуацию не получается, полезно сначала разобраться: кусок мыла плоский или квадратный – и тогда нетрудно увидеть, что большой кусок состоит из четырех маленьких.

На самом деле, как мы увидим в следующих задачах, большой кусок мыла состоит из восьми маленьких; соответственно, на первые семь стирок ушло 7 маленьких кусочков, значит, одного оставшегося маленького куска хватит на одну стирку.

Если занятие начинается с этой задачи, то совершенно необязательно сразу подробно ее разбирать. Надо только объяснить, что с наивным рассуждением имеется какая-то проблема.

Задача 2

Квадрат со стороной: а) 3 см; б) 1 м – разрезали на квадраты со стороной 1 см. Сколько квадратиков получилось?

Куб со стороной: в) 3 см; г) 1 м – разрезали на кубики со стороной 1 см. Сколько кубиков получилось?

Комментарий к решению:

Посчитать что-нибудь непосредственно на объемной картинке всегда непросто. Обычно приходится так или иначе сводить все к плоской задаче. Один из способов сделать это – рассмотреть картинку послойно («по этажам»).

Решение:

в) Куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из трех одинаковых слоев. Каждый из этих слоев представляет собой квадрат размером 3×3, который, как мы уже выяснили в задаче 1, состоит из 9 клеток. Значит, всего кубиков $3 \cdot 9 = 27$.

г) Аналогичным образом находим, что куб со стороной 1 м состоит из $100^3 = 1\,000\,000$ сантиметровых кубиков (собственно, это рассуждение и объясняет, почему в одном кубическом метре не сто кубических сантиметров, а целый миллион).

Вообще, разрезая куб, например метровый, на достаточно маленькие кубики, можно сложить сколь угодно высокую башню.

Задача 3

Грузчик на складе может поднять упаковку размером $3 \times 3 \times 3$ литровых пакетов молока. Смогут ли три грузчика поднять упаковку размером $9 \times 9 \times 9$ пакетов?

Решение:

Даже если просто подсчитать вес большой упаковки пакетов: $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$, то есть примерно 729 кг, то станет ясно, что втроем ее не поднять.

В любом случае стоит разобраться, из скольких же маленьких упаковок состоит большая. Но нетрудно заметить, что эту задачу мы фактически уже решали выше (с кубиками вместо пакетов молока).

Ответ: нет, так как большая упаковка тяжелее маленькой в 27 раз.

Задача 4

Детский надувной бассейн имеет высоту 30 см, а его дно представляет собой квадрат со стороной 1 м. Сколько весит такой бассейн с водой?

Решение:

Вспомним, что 1 литр, то есть 1 дм^3, воды весит 1 кг. Поэтому вес бассейна с водой в кг равен его объему в дм^3. Соответственно, объем нашего бассейна – $3 \cdot 10^2 = 300$ дм^3, а вес – 300 кг.

Ответ: 300 кг.

Задача 5

Саша и Юра построили по башне из кубиков. Обе башни имеют квадратное основание и составлены из одинакового числа кубиков:

а) Сторона основания Юриной башни в четыре раза больше, чем Сашиной. Во сколько раз Сашина башня выше?

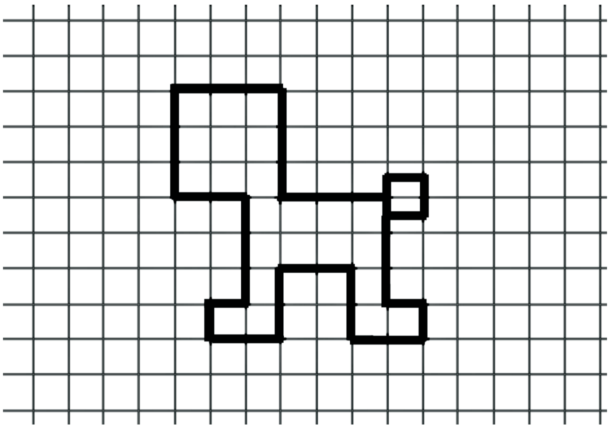
б) Сашина башня в четыре раза выше, чем Юрина. Во сколько раз у Юриной башни больше сторона основания?

Ответ: а) в 16 раз; б) в 2 раза.

» Центральный вопрос занятия – как изменяются объемы и площади фигур произвольной формы при изменении линейных размеров в k раз (в самом простом виде этот вопрос уже встречался нам в задаче 3).

Задача 6

Саша сложил картинку из квадратиков со стороной 2 см, а Юра – аналогичную картинку из квадратиков со стороной 4 см. Во сколько раз площадь Сашиной картинки меньше площади Юриной картинки?



Стоит также выяснить, какой будет ответ, если изменять размеры не в 2 раза, а в k раз. Отметим, что он совершенно не зависит от формы фигуры. Отсюда можно сделать вывод, что тот же ответ имеет и следующая задача.

Задача 7

Как изменится масса слона, если увеличить его (по всем размерам) в 2 раза? (Считать, что слон имеет форму параллелепипеда, конечно, нельзя). Как изменится площадь слона на фотографии?

Ответ: в 8 раз; в 4 раза.

Решение:

Чтобы связать задачу с предыдущей, можно сначала представить себе, что слон «пиксельный» – сложен из небольших кубиков. Теперь, когда кубики становятся совсем маленькими, пиксельный слон становится неотличим от настоящего.

Никакого формального доказательства в этой задаче, конечно, не требуется, достаточно понять, каков ответ. На самом деле, с ростом размера слона его объем – а значит, и масса – будет расти как куб линейных размеров. А площадь поперечного сечения ноги – следовательно, и прочность костей – только как квадрат линейных размеров. То есть при увеличении размера масса слона будет расти существенно быстрее прочности ног и увеличенный слон не сможет стоять на ногах.

Тот же эффект можно увидеть и на простой дискретной модели: если складывать из кубиков большой куб, то нагрузка на отдельный кубик будет расти пропорционально размерам большого куба – просто из-за того, что будет расти башенка кубиков над ним. Поэтому в какой-то момент куб рухнет под собственным весом.

Если известно, как меняются площади и объемы при масштабировании, то нетрудно понять, как (качественно) должны выглядеть разные формулы для площадей и объемов.

Задача 8

а) Обозначим площадь круга радиуса 1 через V_2. Чему равна площадь круга радиуса R?

б) Обозначим объем шара радиуса 1 через V_3. Чему равен объем шара радиуса R?

Ответ: а) $V_2 R^2$; б) $V_3 R^3$.

Вычисление констант V_2 и V_3 – вопрос существенно более тонкий. Можно показать, что $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi$.

Задачи для самостоятельной работы

1. На левую чашу весов положили два шара радиусов 3 и 5, а на правую – один шар радиуса 8. Какая из чаш перевесит? (Все шары изготовлены целиком из одного и того же материала.)

Типичный ответ на такой вопрос – «никакая, потому что 3 + 5 = 8». Такой ответ можно опровергнуть совершенно наглядным геометрическим рассуждением: заметим, что два маленьких шарика, если их поставить рядом, влезут внутрь большого; значит, их суммарный объем меньше.

2. На рынке продается два вида арбузов одинакового диаметра. Первый – по 100 рублей, зато с очень тонкой коркой, а второй по 70 рублей, но 20 % его радиуса занимает корка (которую придется выкинуть). Какие арбузы выгоднее покупать?

3. Длина экватора глобуса равна 1 м. Каков масштаб глобуса? Какую площадь на нем занимает Россия? (Длина земного экватора равна 40 000 км; площадь России – примерно 17 000 000 км^2).

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

2.1. Задачи на разрезание

Задачами на разрезание увлекались многие ученые с древнейших времен. Решения многих простых задач на разрезание были найдены еще древними греками, китайцами, но первый систематический трактат на эту тему принадлежит перу Абу-ль-Вефы, известного арабского математика и астронома X века. Геомеры всерьез занялись решением задач на разрезание фигур на наименьшее число частей и последующее составление из них той или иной новой фигуры лишь в начале XX века.

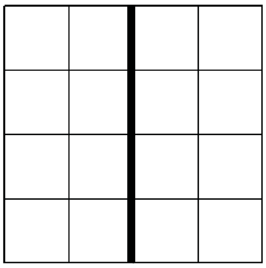
Одним из основоположников этого увлекательного раздела геометрии был знаменитый составитель головоломок англичанин Генри Э. Дьюдени. Большинство существовавших ранее рекордов по разрезанию фигур побил эксперт австралийского патентного бюро Гарри Линдгрен. Он является ведущим специалистом в области разрезания фигур.

В наши дни любители головоломок увлекаются решением задач на разрезание прежде всего потому, что универсального метода решения таких задач не существует, и каждый, кто берется за их решение, может в полной мере проявить свою смекалку, интуицию и способность к творческому мышлению. Поскольку здесь не требуется глубокое знание геометрии, то любители иногда могут даже превзойти профессионалов-математиков. Вместе с тем, задачи на разрезание не являются несерьезными или бесполезными, они не так уж далеки от серьезных математических задач.

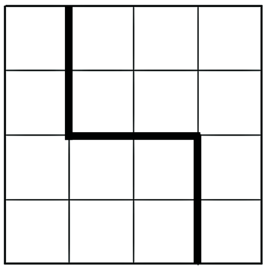
Вводная задача

Квадрат содержит 16 клеток. Разделите квадрат на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. (Способы разрезания квадрата на две части будем считать различными, если части квадрата, полученные при одном способе разрезания, не равны частям, полученным при другом способе). Сколько всего решений имеет задача?

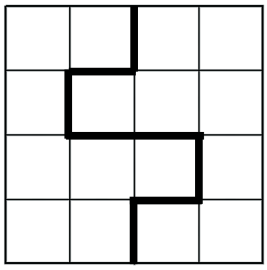
Указание. Найти несколько решений этой задачи не так уж сложно. На рисунке некоторые из них показаны, два решения одинаковы, так как полученные в них фигуры можно совместить наложением (если повернуть квадрат 3 на 90 градусов).



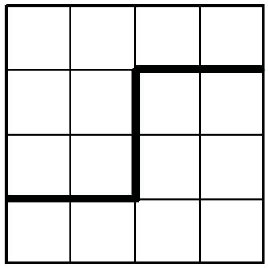
1)



2)

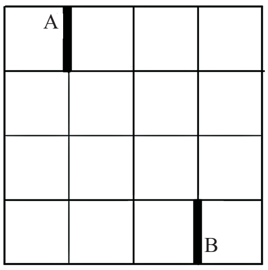


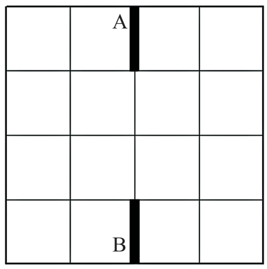
3)



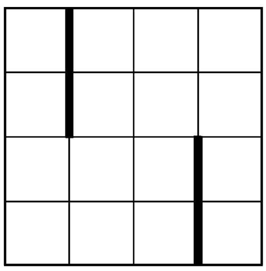
4)

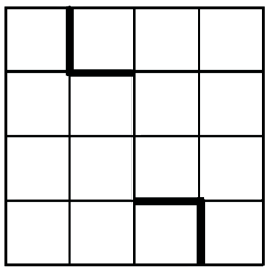
Но найти все решения и ни одного не потерять уже труднее. Заметим, что ломаная, делящая квадрат на две равные части, симметрична относительно центра квадрата. Это наблюдение позволяет шаг за шагом рисовать ломаную с двух концов. Например, если начало ломаной в точке А, то конец ее будет в точке В. Убедитесь, что для данной задачи начало и конец ломаной можно нарисовать двумя способами, показанными на рисунке.



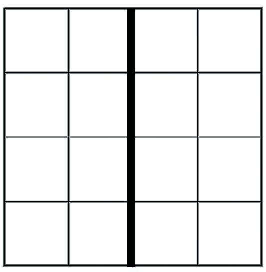


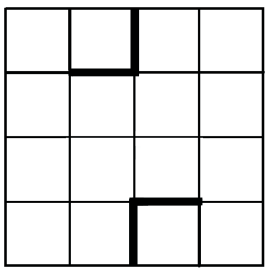
При построении ломаной, чтобы не потерять какое-либо решение, можно придерживаться такого правила: если следующее звено ломаной можно нарисовать двумя способами, то сначала нужно заготовить второй такой же рисунок и выполнить этот шаг на одном рисунке первым, а на другом – вторым способом (на рисунке показаны два продолжения).

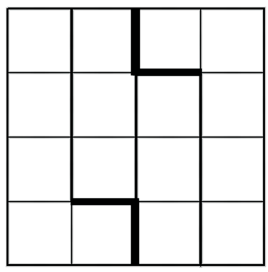




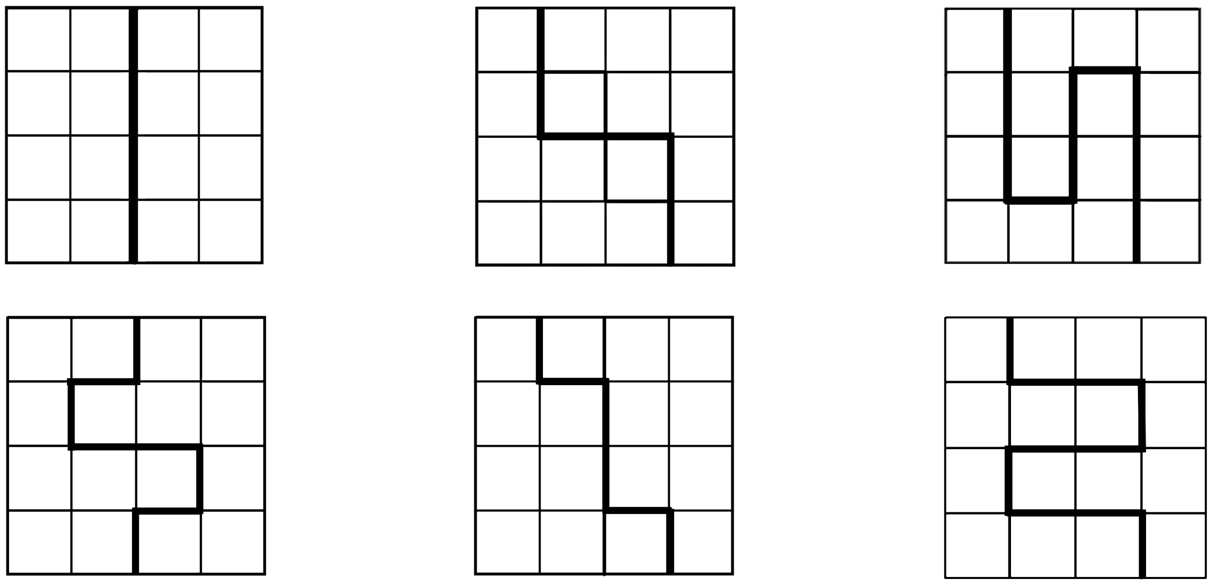
Аналогично нужно поступать, когда способов не два, а три (на рисунке показаны три продолжения). Указанный порядок действий помогает найти все решения.





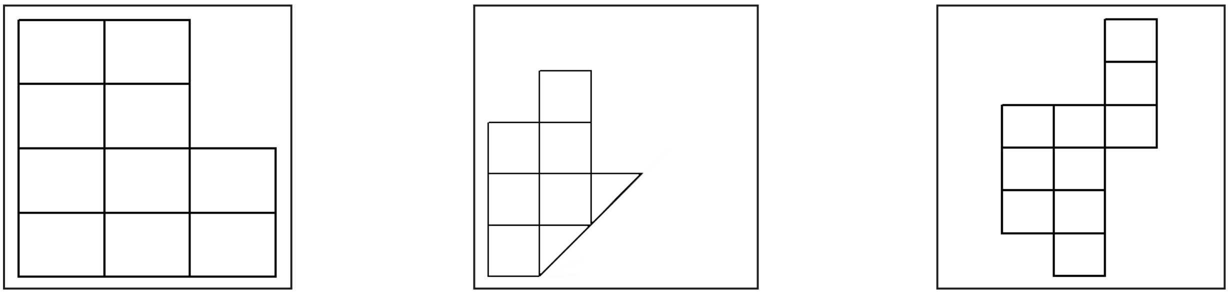


Ответ: задача имеет 6 решений, если не различать лицевую и изнаночную стороны.



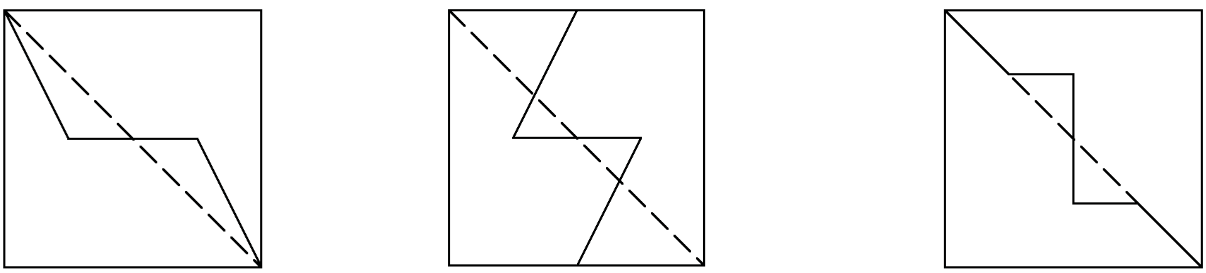
Задачи с решением

1. Разрежьте каждую из фигур пополам (то есть на две одинаковые и по площади и по форме части).



2. Разрежьте квадрат на два равных: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) семиугольника.

Ответ:



а) б) в)

3. Покажите, как любой треугольник можно разрезать на четыре равных треугольника.

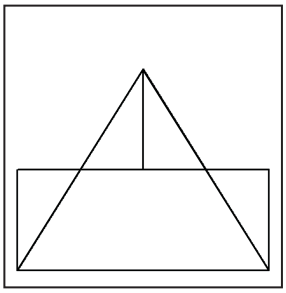
Ответ: проведите средние линии треугольника.

4. Разрежьте прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника.

Ответ: соедините вершину прямого угла с серединой гипотенузы. Доказать, что получатся именно равнобедренные треугольники, очень просто: прямоугольный треугольник можно достроить до прямоугольника, а диагонали прямоугольника равны и делятся точкой пересечения пополам.

5. Разрежьте произвольный треугольник на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

Ответ:



Задания для самостоятельной работы

1. Начертите прямоугольник со сторонами 9 см и 4 см. Вырежьте его. Затем разрежьте этот прямоугольник на три прямоугольника так, чтобы из них можно было составить квадрат, разрежьте тот же прямоугольник на две части, из которых можно составить квадрат.

2. Разрежьте прямоугольник со сторонами 16 см и 9 см на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат.

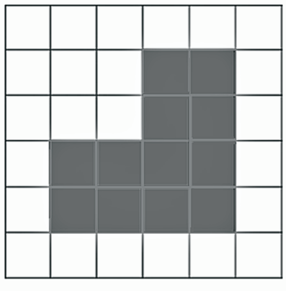
3. От прямоугольного ковра размером 9×12 дм отрезали прямоугольный кусок размером 8×1 дм (большая сторона отрезанного куска параллельна меньшей стороне ковра). Разрежьте оставшуюся часть ковра на три куска, из которых можно составить ковер прямоугольной формы.

4. Как из шести спичек, не ломая их, сложить четыре треугольника, каждая сторона которого равна 1 спичке?

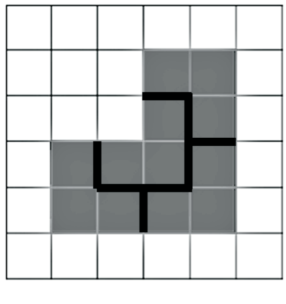
Ответ: из шести спичек составляется правильная треугольная пирамида.

Задания для работы в компьютерном классе

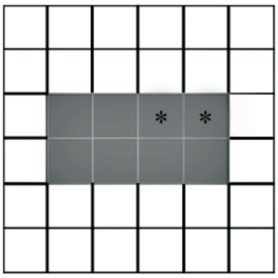
1. Разрежьте закрашенную фигуру на четыре равные части.



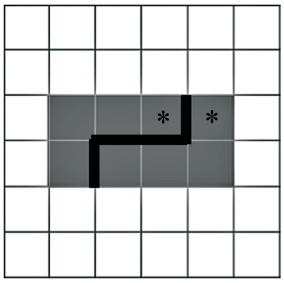
Ответ:



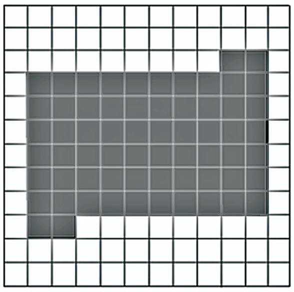
2. Разрежьте прямоугольник на две равные части так, чтобы в каждой из них была звездочка.



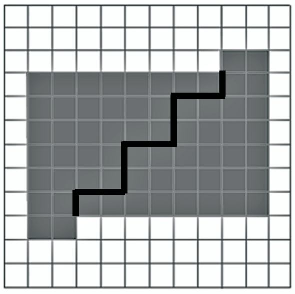
Ответ:



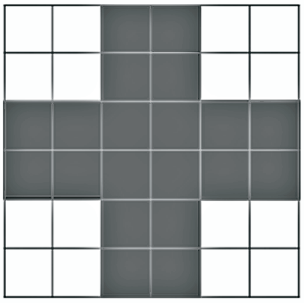
3. Восьмиугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.



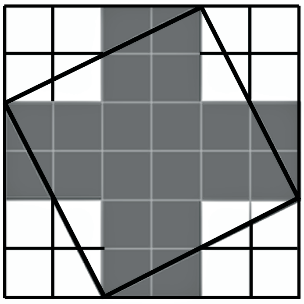
Ответ:



4. Греческий крест разрежьте на несколько частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

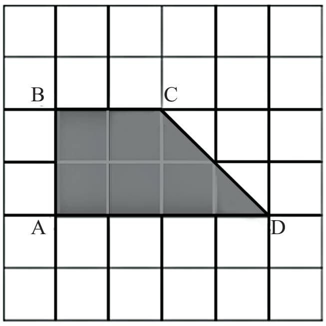


Ответ:

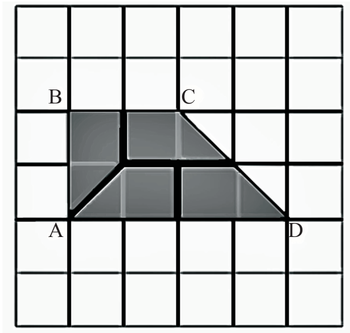


Задания для самостоятельной работы в компьютерном классе

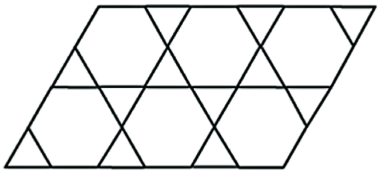
1. Разрежьте трапецию на четыре равные трапеции.



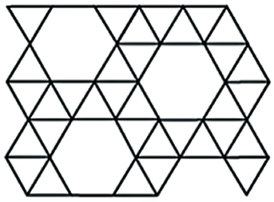
Ответ:



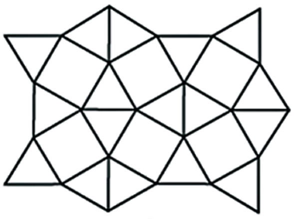
2. Сколько красок потребуется для правильной раскраски паркетов, части которых изображены на рисунке?



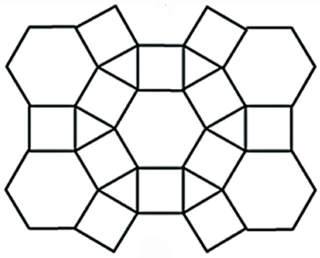
а)



б)

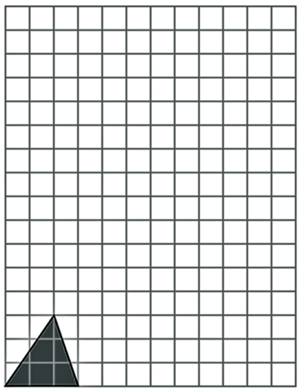


в)

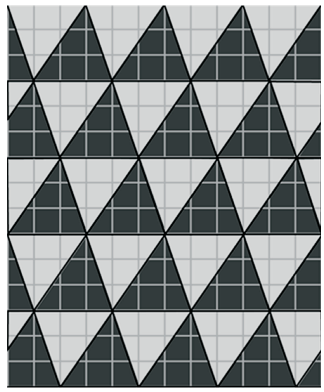


г)

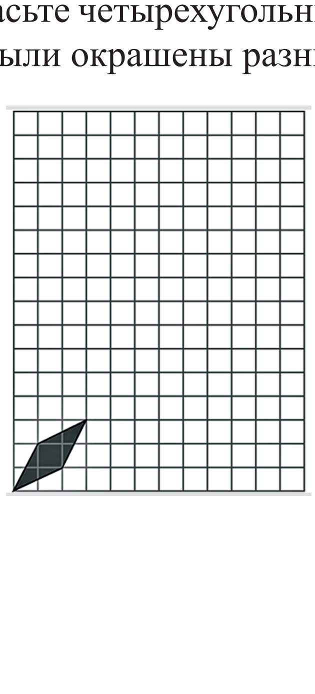
3. Изобразите паркет, составленный из треугольников, равных данному. Раскрасьте треугольники в два цвета так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами.



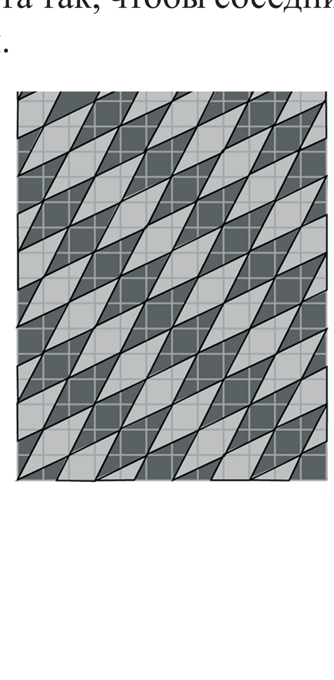
Ответ:



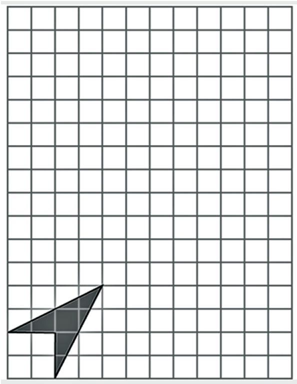
4. Изобразите паркет, составленный из четырехугольников, равных данному. Раскрасьте четырехугольники в два цвета так, чтобы соседние четырехугольники были окрашены разными цветами.



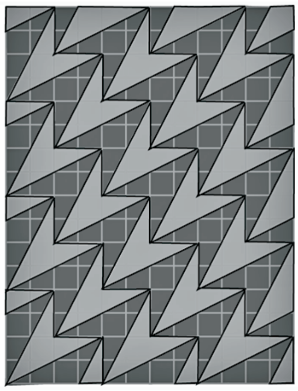
Ответ:



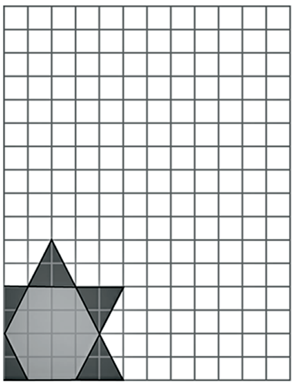
5. Изобразите паркет, составленный из четырехугольников, равных данному. Раскрасьте четырехугольники в два цвета так, чтобы соседние четырехугольники были окрашены разными цветами.



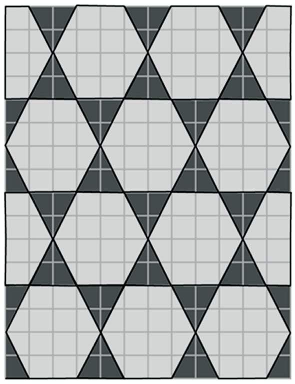
Ответ:



6. Продолжите составление паркета из шестиугольников и треугольников, равных данным, так чтобы в каждой вершине сходилось два шестиугольника и два треугольника. Раскрасьте шестиугольники одним цветом, а треугольники – другим.



Ответ:



2.2. Игра «Танграм»

Эта игра возникла в Китае около четырех тысяч лет назад. Название игры-головоломки на составление различных фигур, равносоставленных квадрату, произошло от имени ее изобретателя Танг. Раньше этой игрой очень увлекались и даже устраивали специальные соревнования.

Разрезав квадрат так, как показано на рисунке 1, и используя все 7 фигурок-танов, составляем силуэты фигур, данных на рисунках 2 и 3.

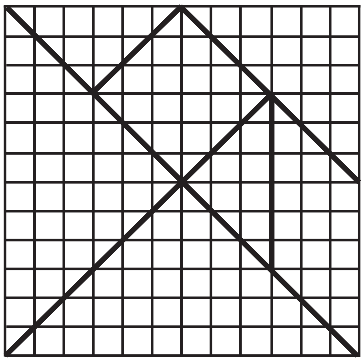


Рис. 1

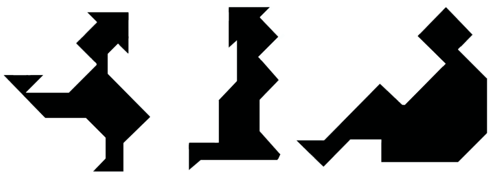


Рис. 2

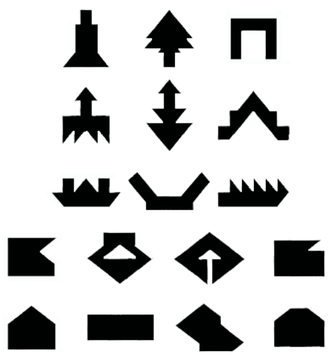


Рис. 3

Методические рекомендации: Детям можно раздать рисунки фигур в натуральную величину. Тогда школьник может решать задачу, накладывая части головоломок на рисунок фигуры и тем самым подбирая нужные части, что упрощает задачу. Если эта технология освоена, рисунки можно дать уже в меньшем масштабе, что усложнит задачу.

Предложите учащимся попробовать самостоятельно составить любую фигуру, используя все таны. Для упрощения задания сначала можно называть предметы: молоток, мостик, кепка, дом, свеча, рыба и т. д.

Попросите сложить треугольник, используя четыре части танграма: один большой треугольник, два маленьких треугольника и квадрат; один большой треугольник, два маленьких треугольника и параллелограмм; один большой треугольник, один средний треугольник и два маленьких треугольника.

В качестве домашнего можно дать задание составить фигуры, например, по теме «Животные Африки».

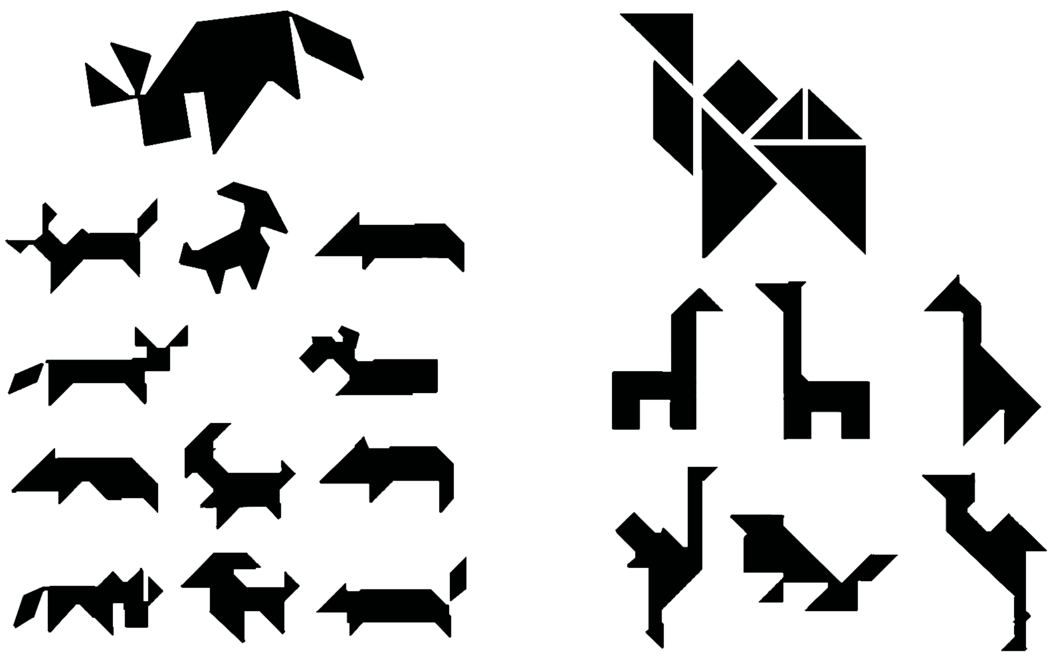


Рис. 4. Животные Африки

2.3. Геометрические неравенства

Геометрия по своему происхождению – это наука об измерении. Что же измеряют в геометрии? Разумеется, прежде всего, длины, расстояния. Затем появляется измерение площадей, объемов, других геометрических величин. Что является результатом измерения геометрической величины? Без всяких колебаний мы отвечаем, что результатом измерения является число, мера измеряемой величины. Надо, однако, отметить, что такое слияние геометрии и арифметики, науки об измерениях и науки о числах, происходило очень медленно и не очень просто.

Если выбрана единица измерения, то каждому отрезку AB мы можем сопоставить положительное число AB, его длину. При этом выполняются естественные требования, центральным из них является неравенство треугольника, которое может быть записано так: для любых трех точек A, B, C выполняется неравенство $AC \leq AB + BC$, причем равенство имеет место только в том случае, когда точка B принадлежит отрезку AC.

Подавляющее большинство задач этой темы решается с использованием неравенства треугольника. Мы сейчас напомним вам различные геометрические неравенства, которые тесно связаны с неравенством треугольника.

- Отрезок прямой, соединяющий точки A и B, – самый короткий путь, соединяющий A и B. В частности, этот отрезок короче любой ломаной с концами A и B.
- Перпендикуляр всегда короче наклонной. Если мы из некоторой точки опустим перпендикуляр на данную прямую (или плоскость), то этот перпендикуляр будет короче расстояния от этой точки до какой бы то ни было точки данной прямой (плоскости).
- В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.
- Выпуклая ломаная с концами A и B всегда короче объемлющей ее ломаной с теми же концами.

Пример:

Возьмем три положительных числа a, b, c. Каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы из отрезков длин a, b, c можно было бы составить треугольник?

По неравенству треугольника, если a, b, c – длины сторон некоторого треугольника, должны выполняться три неравенства:

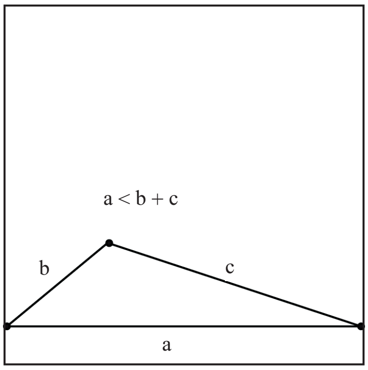
$$a<b+c, \quad b<a+c, \quad c<a+b.$$

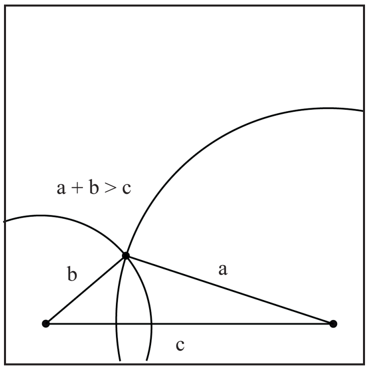
Заметим, что из них можно извлечь полезные следствия типа неравенства $a>b-c$, которое можно прочесть так, что каждая сторона треугольника больше разности двух других.

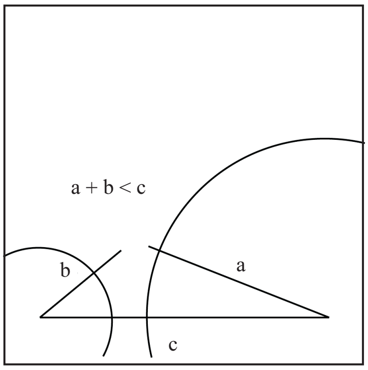
Кроме того, заметим, что, если мы можем расположить числа a, b, c в порядке их роста, например, знаем, что $a \leq b \leq c$, содержательным остается только одно неравенство: $c<a+b$ (то есть, что самая большая сторона меньше суммы двух других). Ясно, что любая другая сторона не больше c (самой большой стороны) и, значит, меньше, чем сумма c с еще одной стороной.

Итак, пусть $a \leq b \leq c$ и $c<a+b$. Существует ли треугольник со сторонами a, b, c? Конечно, существует: построим отрезок c и опишем две окружности с центрами в концах отрезка c и радиусами a и b. Они обязательно пересекутся. Это вам кажется очевидным из рисунка. Можно привести более точное обоснование: часть отрезка c будет принадлежать обоим кругам, следова-

тельно, круги пересекаются, но при этом один из них не может лежать внутри другого (тогда сторона c не была бы наибольшей). Следовательно, пересекаются границы кругов.



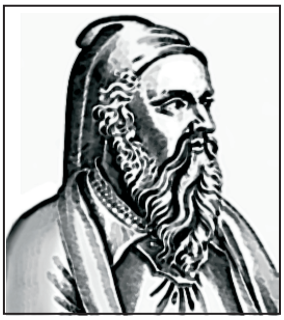




Пусть теперь даны две стороны треугольника a и b, причем $a \le b$. В каких границах может лежать его третья сторона c? По неравенствам треугольника имеем $b-a<c<a+b$. Возникает вопрос: если мы возьмем любое число c в этом интервале, сможем ли мы построить треугольник со сторонами a, b, c? Ответ на этот вопрос положительный: действительно, данные два неравенства являются двумя из трех достаточных неравенств треугольника: $c<a+b$ и $b<a+c$. Третье же неравенство $a<b+c$ очевидно, следует из того, что $a \le b$.

Страничка истории

ПИФАГОР



Пифагор – древнегреческий математик, философ. Мы не знаем точных дат его рождения и смерти. Предположительно: родился он в 570 году, умер в 490 году до н. э.

Юношей он едет в Египет, чтобы обучаться и постигать древние премудрости. Учеба в Египте способствует тому, что он сделался одним из самых образованных людей своего времени. Трудно найти человека, у которого бы имя Пифагора ни ассоциировалось с теоремой Пифагора. Даже те, кто в своей жизни далек от математики, продолжают сохранять воспоминания о «пифагоровых штанах» – квадрате на гипотенузе, равновеликом двум квадратам на катетах.

«Все есть число». Эти слова, приписываемые Пифагору, отмечают важный момент в развитии математики. Пифагорейцы (ученики Пифагора) рассматривали отношения целых чисел и с их помощью измеряли геометрические величины. Кризис разразился при вычислении диагонали квадрата. По теореме Пифагора, квадрат отношения диагонали квадрата к его стороне должен равняться двум. Но Пифагору было ясно, что не существует отношения двух целых чисел, квадрат которых был бы равен двум. Вот рассуждение, вполне доступное времени Пифагора: если бы отношение двух взаимно простых чисел $\frac{m}{n}$ в квадрате равнялось двум, то есть если бы выполнялось равенство

$\frac{m^2}{n^2} = 2$ и $m^2 = 2n^2$, то из этого следовало бы, что число m является четным. Подставляя $m = 2k$ и сокращая на два, получили бы равенство $2k^2 = n^2$, откуда следовало бы, что и n должно быть четным, а это противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$.

1. В треугольнике ABC известны длины двух сторон: $AB = 4{,}7$, $BC = 0{,}5$. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

Решение:

Имеем $AB - BC < AC < AB + BC$, или $4{,}2 < AC < 5{,}2$, откуда, поскольку величина AC − целое число, $AC = 5$.

2. На плоскости даны точки A, B, C, D. Известно, что $AD = 50$, $AB = 13$, $BD = 37$, $AC = 24$, $CD = 26$. Найдите BC.

Решение:

$AB + BD = AD,$ следовательно, A, B, D лежат на одной прямой,

$AC + CD = AD,$ следовательно, и A, C, D тоже лежат на одной прямой. Отсюда следует, что A, B, C, D лежат на одной прямой и $BC = 11$.

3. Прямолинейный прут длиной 2 м разрезали на пять кусков, длиной не менее 17 см каждый. Докажите, что среди них найдутся три, из которых можно составить треугольник.

Решение:

Предположим, что длины пяти кусков $a \le b \le c \le d \le e$.

Рассмотрим тройки – (a, b, c), (b, c, d), (c, d, e). Если бы нельзя было построить треугольник ни для какой из этих троек, то были бы справедливы неравенства:

$c \ge a + b, \ \ d \ge b + c \ge a + b + b = a + 2b;$

$e \ge c + d \ge a + b + a + 2b = 2a + 3b.$

Тогда:

$a + b + c + d + e \ge a + b + a + b + a + 2b + 2a + 3b = 5a + 7b \ge 12a \ge 12 \cdot 17 = 204;$

$204 > 200 = a + b + c + d + e.$

Это противоречие показывает, что хотя бы одна из троек задает стороны треугольника.

4. Докажите, что сторона треугольника не превосходит половины периметра этого треугольника.

Решение:

Очевидно, что $c < a + b$, откуда $2c < a + b + c$, или $c < \frac{a + b + c}{2}$.

5. Длины сторон и одной диагонали четырехугольника равны 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Какое из этих чисел является длиной диагонали?

Решение.

Имеем: $d > y - x$, $d > t - z$.

Отсюда следует, что d не может равняться ни 1, ни 2. Оно не может равняться и 7,5, так как не остается двух пар чисел, сумма которых больше 7,5; d не может равняться 5, так как в треугольнике со стороной 7,5 третья сторона должна равняться 2,8 ($d > z - t$); но в этом случае второй треугольник (5; 1; 2) не существует. Итак, единственная возможность: $d = 2{,}8$.

6. Обязательно ли равны два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

Решение:

Необязательно. Возьмем треугольник со сторонами 8, 12 и 18 см и увеличим его в полтора раза. Получится треугольник с такими же углами, а стороны у него будут равны 12, 18 и 27 см. (Возможны и другие примеры неравных треугольников, удовлетворяющих условиям задачи.)

7. Даша и Таня живут в одном подъезде. Даша живет на 6-м этаже. Выйдя от Даши, Таня пошла не вниз, как ей было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, она поняла свою ошибку и пошла вниз на свой этаж. Оказалось, что Таня прошла в полтора раза больше, чем если бы она сразу пошла вниз. Сколько этажей в доме?

Ответ: 7 этажей.

8. ***Задания олимпиады «Кенгуру»***

» Цена билета в театр выросла на 40 %, а выручка снизилась на 16 %. На сколько процентов уменьшилось число зрителей?

(A) 10 %; (B) 16 %; (C) 20 %; (D) 40 %; (E) 60 %

Ответ: D.

» На пиратском рынке бочка рома стоит 800 дублонов, или 100 пиастров, а пистолет стоит 100 дублонов, или 250 дукатов. Сколько пиастров нужно заплатить за попугая, за которого просят 100 дукатов?

(A) 2; (B) 5; (C) 10; (D) 25; (E) 50

Ответ: B.

» Альберт всегда лжет. Однажды он сказал своему другу Франку: «Хотя бы один из нас никогда не лжет». Тогда обязательно:

(A) Франк всегда лжет;

(B) Бывает, что Франк лжет;

(C) Франк никогда не лжет;

(D) Бывает, что Франк говорит правду;

(E) Альберт не мог произнести такую фразу.

Укажите верное утверждение.

Ответ: B.

2.4. Дружим с компьютером

Изучая математику, необходимо использовать все возможности современных компьютеров. Ваши ученики уже умеют пользоваться калькулятором для вычислений, набирать и оформлять несложные тексты в текстовом редакторе (например Microsoft Word), составлять таблицы с помощью редактора таблиц (например Microsoft Excel), пользоваться глобальной сетью Интернет и искать в ней информацию, рисовать геометрические фигуры (например Paint). Изучая геометрию, мы работаем с геометрическими фигурами и строим чертежи. В стандартном графическом редакторе, предназначенном для создания художественных рисунков (Paint), это делать не совсем удобно. Поэтому полезно научиться работать со специальной программой, с помощью которой можно работать с геометрическими фигурами и строить чертежи. Наблюдая за изменяющимися геометрическими объектами и за величинами, с ними связанными, мы в режиме реального времени можем даже в 7-м классе находить некие закономерности, проводить эксперименты, имитировать построения циркулем и линейкой, делать геометрические преобразования, решать очень сложные задачи, используя компьютерную среду. Предлагаем выбрать компьютерную образовательную программу для построения чертежей, в которой вы будете выполнять задания данного раздела. Вот некоторые такие программы: «Математический конструктор», «Живая математика», «Живая геометрия», GeoGebra.

Задания раздела «Дружим с компьютером» можно выполнять по мере изучения курса с выходом в компьютерный класс.

1. *Мини-проект «Отрезок и его длина»*

- Изобразите две точки, постройте отрезок, концами которого являются две заданные точки.
- Найдите, каким образом программа указывает длину отрезка.
- Постройте отрезок заданной длины.
- Найдите инструмент, с помощью которого можно перемещать и поворачивать фигуры.
- Постройте два отрезка одинаковой длины и совместите их наложением.
- Постройте чертеж, который иллюстрирует основное свойство длины отрезка. Проверьте, выполняется ли это свойство, определив длины построенных отрезков.
- На прямой отмечены точки A, B, C так, что $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и AC.

2. *Тест «Отрезок»*

Верны ли утверждения? Отрезки AB и CD равны, если они:

а) лежат на отрезке AD и $AC = BD$;

б) имеют общую середину O и $AO = CO$;

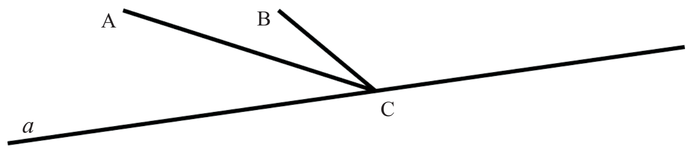
в) $AB = KL$, $CD = LK$;

г) лежат на одной прямой и $AD = 2AB + CD,\ DA = BA + 2DC$.

3. *Исследование, опирающееся на компьютерный эксперимент*

Дана прямая a и две точки – A и B – по одну сторону от нее, при этом точка B ближе к прямой a, чем точка A.

Требуется найти на прямой a точку C, удовлетворяющую условию, что $|AC - CB|$ имеет наибольшее значение.

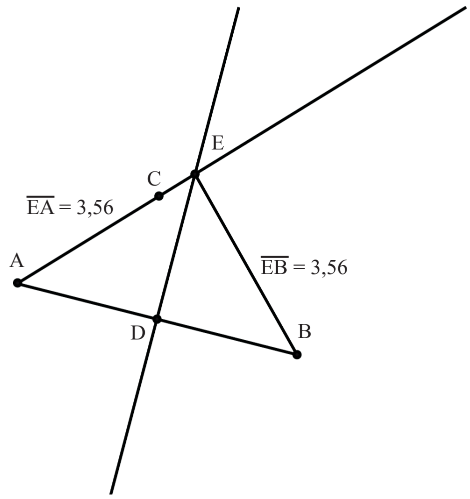


Выделяем точку C и будем перемещать ее по прямой, наблюдая при этом за разностью $|AC-CB|$. Далее замечаем, что если немного переместить точку C по прямой так, чтобы AC и CB увеличились, то величина $|AC-CB|$ увеличится. Если расположить точку C так, чтобы точки A, B, C оказались на одной прямой, то значение $|AC-CB|$ станет равно длине отрезка AB. Если перемещать точку C дальше по прямой (на рисунке это будет перемещение вправо), то значение снова начнет уменьшаться.

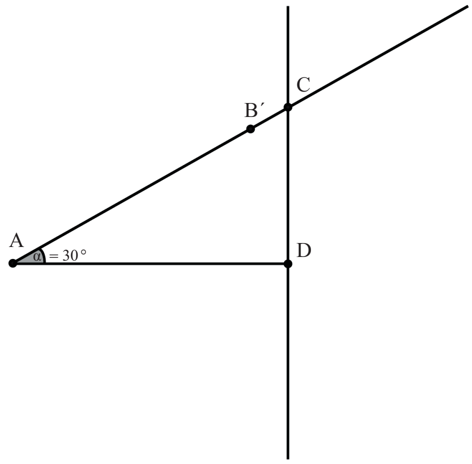
Возникает гипотеза: наибольшее значение $|AC-CB|$ достигается в случае расположения точек A, B, C на одной прямой.

Далее, от компьютерного эксперимента перейдем к обоснованию результата. Оно следует из неравенства треугольника, записанного в виде $|AC-CB|\leq AB$.

4. Восстановите равнобедренный треугольник, если от него остались основание и точка на боковой стороне.



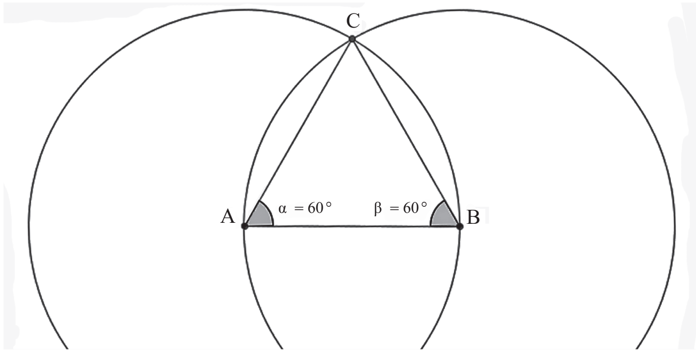
5. Постройте прямоугольный треугольник, острый угол которого равен 30°.



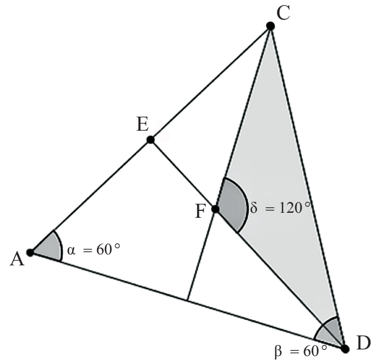
6. Найдите угол между прямыми, на которых лежат две медианы равностороннего треугольника.

Решение:

Сначала построим равносторонний треугольник *ABC*.



Затем проведем две медианы и измерим угол между ними.



7. На продолжении боковых сторон *AC* и *BC* равнобедренного треугольника *ABC* за вершину *C* отметили точки *E* и *D* соответственно так, что *DE* параллельно *AB*. Докажите, что треугольник *CDE* равнобедренный.

8. На сторонах *AB* и *BC* параллелограмма *ABCD* вне его построены равносторонние треугольники *ABM* и *BCK*. Докажите, что треугольник *MKD* – равносторонний.

9. Отрезок *AD* – биссектриса треугольника *ABC*. Через точку *C* проведена прямая, которая параллельна прямой *AD* и пересекает прямую *AB* в точке *E*. Определите вид треугольника *ACE*.

10. Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные его боковым сторонам. Докажите, что периметр образовавшегося четырехугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

11. ***Тест «Треугольник»***

» Сумма углов

а) Если каждый из двух углов треугольника больше 60°, то его третий угол меньше 60°.

б) Если угол при вершине равнобедренного треугольника меньше 100°, то угол при его основании меньше 40°.

в) Наибольший угол треугольника либо больше суммы двух других его углов, либо меньше этой суммы.

г) Существует тупоугольный треугольник, в котором один из углов равен полусумме двух других его углов.

д) Если один из углов прямоугольного треугольника не меньше 30°, то в нем найдется угол не больше чем 60°.

Ответ: +−−++

12. ***Тест «Равнобедренный треугольник»***

» Периметр

а) Если одна из сторон равнобедренного треугольника равна 2, а другая сторона равна 3, то его периметр равен 8.

б) Если одна из сторон равнобедренного треугольника равна 1, а другая сторона равна 2, то его периметр больше 4.

в) Если боковая сторона равнобедренного треугольника меньше 1, то его периметр больше 4.

г) Если одна из сторон равнобедренного треугольника больше 1, но меньше 2, а другая сторона больше 2, но меньше 3, то его периметр больше 4, но меньше 8.

д) Чем больше периметр равнобедренного треугольника, тем больше его площадь.

Ответ: −+++−

13. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что если $BD = BE$, то $AB = BC$. (Задача № 25 ГИА 2014 г.)

14. Три стороны параллелограмма равны. Докажите, что отрезок с концами в серединах противоположных сторон параллелограмма равен четверти его периметра. (Задача № 25 ГИА 2014 г.)

Пример исследования с использованием компьютерной среды

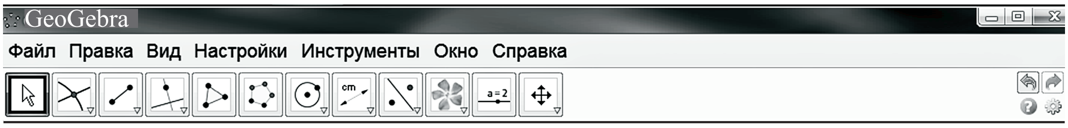
Укладка трубы. Две улицы в городе не параллельны, но точки пересечения не имеют, поскольку выходят на площадь. Планируется проложить линию водопровода для снабжения обеих улиц водой так, чтобы каждая его точка была равноудалена от этих улиц. Как проложить водопровод?

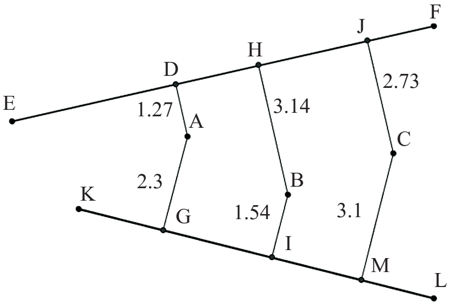
Геометрическая формулировка. Построить множество точек, равноудаленных от двух данных непараллельных отрезков, если точка их пересечения недоступна (улицы будем считать прямолинейными.)

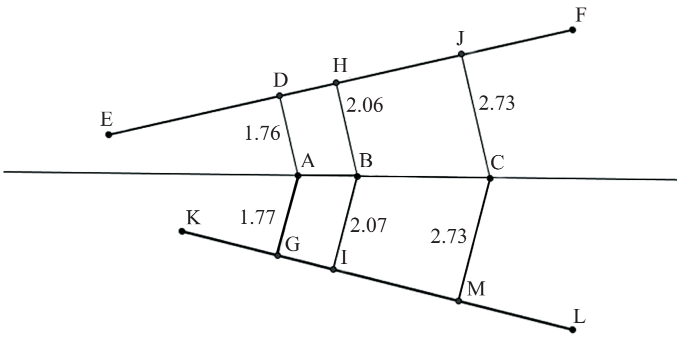
Необходимые знания. Равнобедренный треугольник. Параллельные прямые. Биссектриса.

Наводящие соображения. Допустим, что эти два отрезка имеют общий конец. Тогда искомое множество точек, лежащих внутри образованного угла, лежит на биссектрисе данного угла. Можно предположить, что в исходной задаче ответом также будет биссектриса. Осталось выяснить, как построить биссектрису угла, вершина которого недоступна.

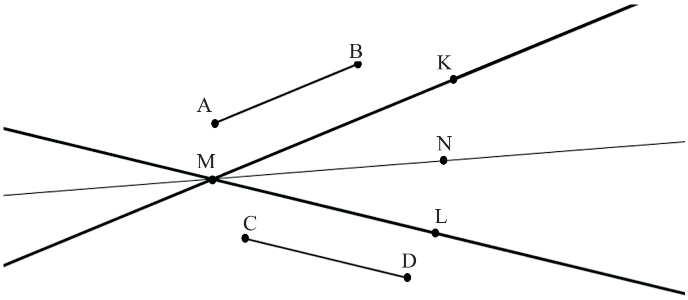
Компьютерный эксперимент. Постройте два непараллельных отрезка, не имеющих общих точек, и три точки во внутренней области предполагаемого угла. Опустите перпендикуляры на стороны угла. Затем измерьте длины перпендикуляров. Передвигая точки A, B, C, расположите их так, чтобы каждая из них была равноудалена от сторон угла. Найдите закономерность в расположении этих точек.







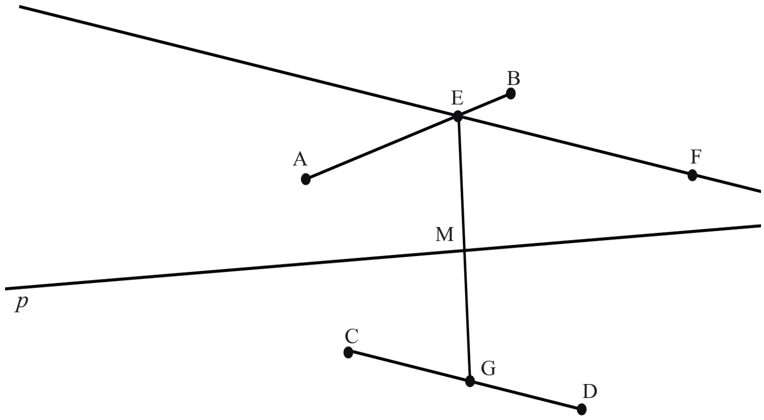
Рациональное рассуждение. Представим себе, что прямые, содержащие отрезки AB и CD, движутся навстречу друг другу с одной и той же скоростью, сохраняя имеющееся направление, причем движение начато одновременно. Тогда точка M – это точка их встречи на рисунке. После этого проведем биссектрису угла KML. Получим искомое множество точек.



Решение:

Пусть E – произвольная точка на отрезке AB. Проведем прямую EF параллельно CD. Проведем EG – биссектрису угла AEF, тогда $\angle AEG = \angle FEG$. Так как EF параллельна CD, то $\angle CGE = \angle FEG$. Следовательно, $\angle AEG = \angle CGE$.

Пусть точка O (ее на рисунке нет, поэтому ее надо себе представить) – вершина угла между AB и CD. Углы при основании треугольника OEG равны, следовательно, треугольник OEG равнобедренный. Проведем прямую p – ось симметрии отрезка EG, она же будет осью симметрии треугольника OEG, поскольку проходит через вершину O. Следовательно, прямая p содержит биссектрису угла при вершине O.



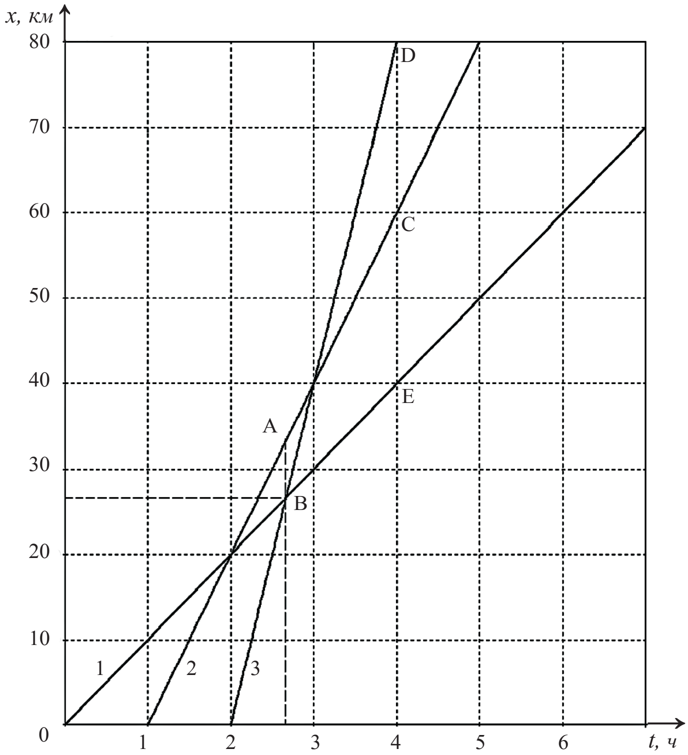
3.1. Задачи на движение с постоянной скоростью

При рассмотрении равномерного прямолинейного движения тел на уроках физики в 7-м классе непосредственно используются знания алгебры 7-го класса по темам: «Уравнения с одной переменной», «Линейная функция и ее график», «Решение систем линейных уравнений», то есть данный материал занимает значительный объем учебной программы. Исследование при обучении конкретных законов движения $S(t)=x_0+vt$ вместо абстрактных функций $y(x)=ax+b$ на уроках алгебры имеет гораздо больший познавательный и практический эффект. К сожалению, на уроках физики нет возможности уделять вопросам равномерного прямолинейного движения тел много внимания. В ходе итоговой аттестации выпускников 9-го класса встречаются задания по теме «Функции и графики» на равномерное движение тел, но они сводится к умению читать готовый график зависимости $S(t)$ при движении с переменной скоростью только одного тела. В результате интересные задания на совместные движения тел и самостоятельное построение графиков законов движения не входят в учебные планы, ни алгебры, ни физики.

Рассмотрим несколько задач и заданий из разделов математики и физики на равномерное движение тел и процессы горения с постоянной скоростью.

Задача 1

Из одного пункта в одном направлении с отрывом в 1 час друг за другом последовали лыжник со скоростью 10 км/ч, мотоцикл со скоростью 20 км/ч и автомобиль со скоростью 40 км/ч. Для каждого из них на одной координатной плоскости постройте график зависимости пройденного пути от времени ($0 \le t \le 5$).



Пользуясь графиками, ответьте на вопросы:

а) Кто движется первым через 5 ч после выхода лыжника?

б) Кого раньше догнал автомобиль – лыжника или мотоциклиста?

в) В какой момент времени все трое окажутся за отметкой 60 км от исходного пункта?

г) В какой момент времени мотоциклист был на одинаковом расстоянии от лыжника и машины?

Комментарий к решению:

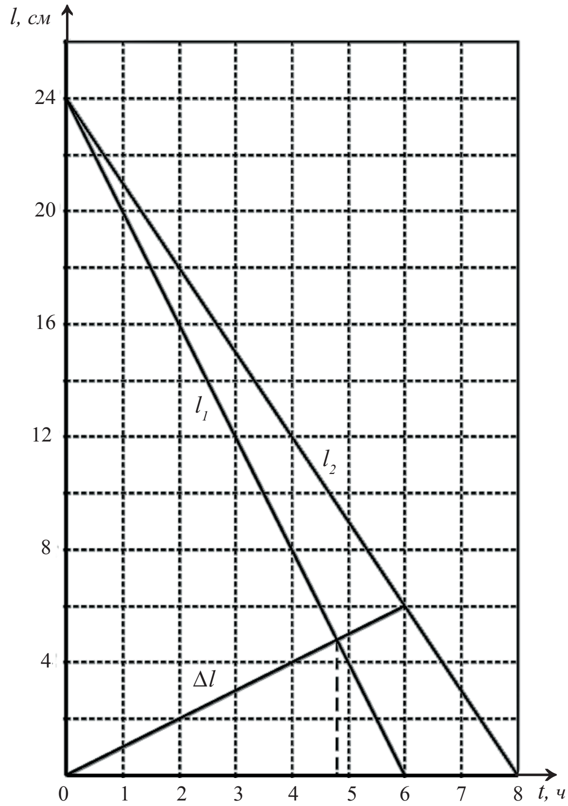
Общий вид закона движения в этом случае: $x(t)=x_0+vt$, где x_0 – начальная координата движущегося тела, v – скорость равномерного движения. Движение лыжника можно сразу записать в виде зависимости: $x_1(t)=10t$. Условное начальное положение мотоцикла определяем исходя из условия: $x(1)=x_0+20\cdot 1=0$. Таким образом, зависимость координаты от времени имеет вид: $x_2(t)=20t-20$. Аналогично находим закон движения машины. Из условия $x(2)=x_0+40\cdot 2=0$, получаем формулу: $x_3(t)=40t-80$. После построения графиков функций можно легко ответить на первые три вопроса задания: через пять часов первой движется машина, автомобиль сначала догнал лыжника, за отметкой 60 км все трое окажутся через 6 часов. На последний пункт можно ответить исходя из анализа графиков, но для точного получения значений координат требуется аналитическое решение задачи. В этом случае выясняется, что для этого нужно знание модулей и их геометрического смысла.

В данном случае уравнение имеет вид: $|x_2(t)-x_1(t)|=|x_2(t)-x_3(t)|$. Подстановка функций приводит к уравнению $|10t-20|=|20t-60|$, или $|t-2|=|2t-6|$. Решение уравнения сводится к решению совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} t-2=2t-6 \\ t-2=-2t+6. \end{array}\right.$

Отсюда ответ $\left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=2\frac{2}{3} \end{array}\right.$ и соответствующие координаты мотоциклиста $\left[\begin{array}{l} x_C=60, \\ x_A=33\frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Задача 2

Две свечи длиной 24 см зажжены одновременно. Одна сгорела за 6 ч, другая за 8 ч.



а) Найти зависимость разности длины свечей от времени сгорания.

б) Какой длины была вторая свеча, когда первая сгорела?

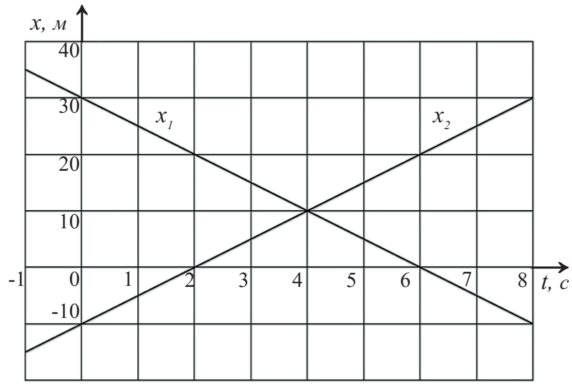
в) Когда вторая свеча будет длиннее первой в два раза?

Комментарий к решению:

Определим скорость сгорания свечей: $v_1 = \frac{24}{6} = 4$ см/ч – скорость горения первой свечи; $v_2 = \frac{24}{8} = 3$ см/ч – скорость горения второй свечи. Таким образом, зависимости длины свечей от времени имеют вид: $l_1(t)=24-4t$, $l_2(t)=24-3t$. Отсюда следует, что разность длины есть функция $\Delta l=t$. Из графика следует, что в момент, когда первая свеча сгорела, длина второй свечи равнялась 6 см. В этот момент времени будет и максимальная разность длины свечей. Так как $\Delta l=l_2-l_1$, то в момент времени, когда $l_2=2l_1$, имеем $\Delta l=l_1$. На рисунке это означает пересечение графиков двух функций Δl и l_1. Соответствующее время находим из уравнения: $t=24-4t$, то есть $t=4{,}8$ ч.

Задача 3

По дороге навстречу друг другу движутся велосипедисты с законами движения $x_1(t) = 30 - 5t$ и $x_2(t) = 5t - 10$. Размерности [x] = 1 м и [t] = 1 с.



а) Определите местонахождение второго велосипедиста через 2 секунды.

б) Определите место и время встречи велосипедистов графически.

в) Определите место и время встречи велосипедистов аналитически.

г) В какой момент времени расстояние между велосипедистами равно 30 м?

Комментарий к решению:

Если первые три пункта не сложные, то последний пункт важен для понимания параметров движения. Итак, $|x_2(t) - x_1(t)| = 30$ или $|10t - 40| = 30$. Решением является *t*, равное 1 с и 7 с. При решении подобных уравнений время, как и координата, могут быть отрицательными. Это имеет физический смысл и означает только то, что при равномерном движении с постоянной скоростью тела двигаются и до момента включения секундомера, и до определенного места на дороге, обозначенного координатой 0.

Задача 4

Теплоход имеет собственную скорость 20 км/ч. Путь вниз по реке занял на 2 часа меньше, чем обратный. С какой средней скоростью передвигался теплоход, если скорость течения реки 4 км/ч?

Комментарий к решению:

Данную задачу, взятую из сборника задач по алгебре для 7–9-го классов [9. С. 11], имеет смысл решить двумя способами.

В первом способе используем 2 часа разницы между движениями вверх и вниз. Пусть *S* – это расстояние между пристанями. Тогда *S*/24 – время движения вниз по реке, а *S*/16 – время движения вверх по реке. Уравнение для определения пройденного пути имеет следующий вид: $\frac{S}{16} - 2 = \frac{S}{24}$. Находим путь: S = 96 и полное время движения: $t = 4 + 6 = 10$ ч. Таким образом, средняя скорость теплохода $V = \frac{2S}{t} = 19{,}2$ *км/ч*. На самом деле для определения средней скорости информация о двух часах – лишняя в этой задаче, так как скорость следует из формулы: $V = \frac{2S}{\frac{S}{16} + \frac{S}{24}} = \frac{2}{\frac{1}{16} + \frac{1}{24}} = \frac{2 \cdot 48}{5} = 19{,}2$.

Задания для самостоятельной работы

1. По скорости найти путь, пройденный машиной за заданное время:
$v = 84$ *км/ч*; $t_1 = 3$ *с*; $t_2 = 6$ *мин.*

2. По скорости найти путь, пройденный машиной за заданное время:
$v = 75$ *км/ч*; $t_1 = 9$ *с*; $t_2 = 9$ *мин.*

3. Машина ехала полпути со скоростью $v = 20$ *км/ч* и полпути со скоростью $v = 30$ *км/ч*. Время движения 5 часов. Найти весь путь и среднюю скорость движения.

Ответ: 120 км; 24 км/ч.

4. Спринтер бежал полпути со скоростью $v = 10$ *м/с* и полпути со скоростью $v = 8$ *м/с*. Время бега 18 *с*. Найти весь путь и среднюю скорость бега.

Ответ: 160 м; 8,89 м/с.

5. Пешеход часть пути прошел со скоростью 3 *км/ч*, затратив на это две трети времени своего движения. За оставшуюся треть времени он прошел остальной путь со скоростью 6 *км/ч*. Определите среднюю скорость движения пешехода.

Ответ: 4 км/ч.

6. Какой длины нужно взять бикфордов шнур, чтобы успеть отбежать на расстояние 300 м, после того как его зажгут? Скорость бега 18 *км/ч*, а скорость пламени по шнуру 0,8 *см/с*.

Ответ: 48 см.

7. Моторная лодка прошла по течению реки расстояние от пункта А до пункта В за 1,5 часа, а от пункта В до пункта А за 2,5 часа. За сколько часов проплывет от пункта А до пункта В плот?

Ответ: 7,5 часа.

8. Лодка прошла по течению реки расстояние от пункта А до пункта В за 1 час и повернула обратно. Через час лодка находилась на расстоянии 5 км от пункта А. Найдите скорость течения реки.

Ответ: 2,5 км/ч.

9. Заданы законы движения двух автомобилей: $x_1 = 50 + 20t$; $x_2 = 200 - 10t$, где [x] = *м*, [t] = *с*. Определите место и время их встречи. В какой момент времени расстояние между ними будет равно 90 м?

Ответ: 5 с, 150 м; 2 с, 8 с.

10. Заданы законы движения мотоциклиста и велосипедиста: $x_1 = 20 + 8t$; $x_2 = 140 - 4t$, где [x] = м, [t] = с. Определите место и время их встречи. В какой момент времени расстояние между ними будет равно 60 м?

Ответ: 10 с, 100 м; 5 с, 15 с.

11. В 11 часов вечера слуга зажег хозяину две свечи и ушел спать, а утром в 7 часов обнаружил его убитым. Одна свеча лежала потухшая на полу, а другая догорала – оставался огарок в 1 см. Когда произошло убийство, если длина целой свечи была 21 см, а опрокинутой во время убийства 16 см?

Ответ: ровно в час.

12. Свеча горела неравномерно: 20 см сгорело за 4 часа, а оставшийся 1 см за 12 минут. Какова средняя скорость горения свечи?

Ответ: 5 см/ч.

3.2. Задачи на расчет массы тел

Часть практикоориентированных задач, находящихся на стыке физики 7-го класса и математики, связана с нахождением масс и объемов тел. Хотя формула здесь, как правило, лишь одна: $m = \rho V$, но задачи на эту тему по-своему интересны. Для их решения нужна таблица плотностей различных веществ. Ниже приведена таблица плотностей наиболее востребованных в задачах веществ. Следует учесть, что в физических задачах система СИ (м, кг, с) неудобна, а удобна система СГС (см, г, с). Поэтому в таблице плотность имеет размерность г/см^3. Перевод в кг/м^3 не составляет трудности.

Плотность различных веществ

Вещество	Плотность, *г/см^3*	Вещество	Плотность, *г/см^3*
Алюминий	2,7	Медь	8,9
Бетон	2,2	Мрамор	2,7
Вольфрам	19,3	Олово	7,8
Железо	7,9	Парафин	0,9
Золото	19,3	Пробка	0,2
Кирпич	1,8	Свинец	11,3
Латунь	8,5	Стекло	2,5
Лед	0,9	Чугун	7
Вода	1	Керосин	0,8

Задача 1

Стакан, заполненный до краев водой, имеет массу 214,6 г. Когда в этот стакан с водой поместили небольшой камень массой 29,8 г и часть воды вылилась наружу, масса стакана с содержимым оказалась равной 232 г. Определите плотность вещества камня.

Составим систему уравнений: $\begin{cases} m + m_1 = 214{,}6 \\ 29{,}8 + m + m_2 = 232, \end{cases}$

где m – масса пустого стакана, m_1 – масса первоначальной воды, m_2 – масса оставшейся воды. После вычитания получаем равенство $m_1 - m_2 = 12{,}4$. Но 12,4 г воды означают 12,4 мл, или 12,4 см^3. Таким образом, плотность камня находим из отношения $\frac{29{,}8}{12{,}4} \approx 2{,}4 \frac{г}{см^3}$.

Задача 2

В куске кварца содержится небольшой самородок золота. Масса куска равна 100 г, его средняя плотность 8 г/см^3. Определите массу золота, содержащегося в куске кварца, если плотность кварца 2,65 г/см^3, а плотность золота 19,4 г/см^3.

Составим уравнение для объема: $\frac{100}{8}=\frac{m}{19{,}4}+\frac{100-m}{2{,}65}$, где m – масса золота. Решение уравнения дает ответ 77,5 г.

Задания для самостоятельной работы

1. В карьере за сутки добыто 5000 м^3 песка. Сколько железнодорожных платформ грузоподъемностью 20 т потребуется, чтобы его перевезти? Плотность песка 1,5 г/см^3.

Ответ: 375 платформ.

2. Какую массу имеет куб с площадью поверхности 150 см^2, если плотность вещества, из которого он изготовлен, равна 2700 кг/м^3.

Ответ: 337,5 г.

3. Брусок квадратного сечения имеет массу 40 кг. Какой станет масса бруска, если длину увеличить в два раза, а каждую сторону квадрата в два раза уменьшить?

Ответ: 20 кг.

4. Железная и алюминиевая детали имеют одинаковые объемы. Найдите массы этих деталей, если масса железной детали на 12,75 г больше массы алюминиевой. Плотность железа 7800 кг/м^3, плотность алюминия 2700 кг/м^3.

Ответ: 19,5 г; 6,75 г.

5. Длина оконного стекла 60 см, ширина 40 см и толщина 3 мм. Плотность стекла – 2500 кг/м^3. Найдите массу.

Ответ: 1,8 кг.

6. Длина листа железа 1 м, ширина 80 см и толщина 1 мм. Плотность железа – 7800 кг/м^3. Найдите массу.

Ответ: 6,24 кг.

7. В мензурке было 15 мл воды. После того как опустили десятиграммовую деталь, уровень поднялся до 19 мл. Из какого материала сделана деталь?

Ответ: из стекла.

8. В мензурке было 20 мл воды. После того как опустили деталь массой 34 г, уровень поднялся до 24 мл. Из какого материала сделана деталь?

Ответ: из латуни.

9. Объем чугунной гири массой 3,5 кг равен 520 см^3. Плотность чугуна 7 г/см^3. Какой объем занимает полость внутри гири?

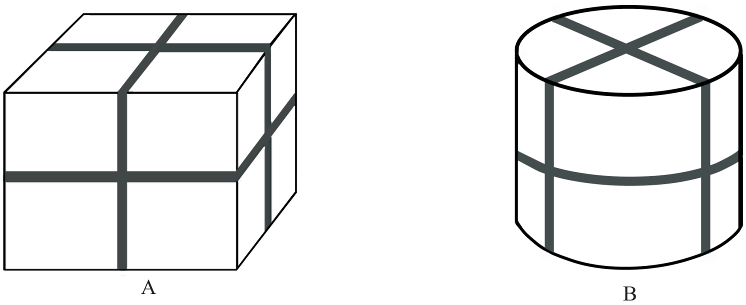
Ответ: 20 см^3.

10. Объем чугунного шара массой 840 г равен 125 см^3. Плотность чугуна 7 г/см^3. Какой объем занимает полость внутри шара?

Ответ: 5 см^3.

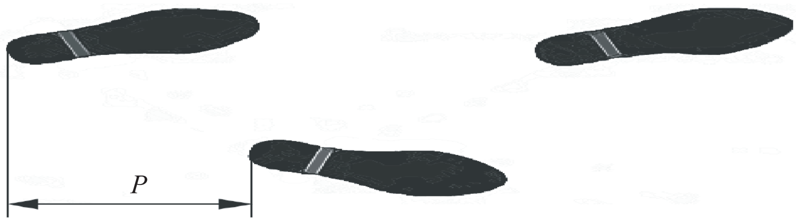
3.3. Задачи из материалов международных исследований математического уровня учащихся основной школы

1. На рисунке изображены две подарочные коробки, обвязанные лентой.



Коробка A – куб со стороной 10 см. Коробка B – цилиндр, высота и диаметр которого равны 10 см. Для какой коробки нужна более длинная лента? Объясните, как вы пришли к ответу.

2. ***«Походка».*** На рисунке изображены следы идущего человека.



Длина шага P – расстояние от конца пятки следа одной ноги до конца пятки следа другой ноги. Для походки мужчин зависимость между n и P приближенно выражается формулой $\frac{n}{P} = 140$, где n – число шагов в минуту, P – длина шага в метрах.

а) Используя данную формулу, определите, чему равна длина шага Сергея, если он делает 70 шагов в минуту.

Ответ: 0,5 м.

б) Длина шага Павла равна 0,8 м. Используя данную выше формулу, вычислите скорость Павла при ходьбе в метрах в минуту (м/мин), а затем в километрах в час (км/ч).

Ответ: 89,6 м/мин; 5,376 км/ч.

3. ***«Общение в интернете».*** Марк (из Сиднея в Австралии) и Ганс (из Берлина в Германии) часто общаются друг с другом в интернете. Чтобы поболтать, они должны выходить в интернет в одно и то же время. Определяя удобное обоим для общения время, Марк просмотрел таблицы, в которых дано время в различных частях мира, и нашел следующую информацию:

Город	Время
Гринвич	24:00 (полночь)
Берлин	1:00
Сидней	10:00

В о п р о с 1. Какое время в Берлине, если в Сиднее 19 : 00?

Ответ: 10 : 00.

В о п р о с 2. Марк и Ганс не могут общаться между 9 : 00 и 16 : 30 по их местному времени, так как в это время они должны находиться в школе. Они также не могут общаться с 23 : 00 до 7 : 00 по их местному времени, поскольку в это время они спят. Какое время было бы удобно для мальчиков, чтобы они могли поболтать? Укажите в таблице местное время для каждого города.

Город	**Время**
Сидней	
Берлин	

Ответ: Сидней (с 7 : 00 до 8 : 00, с 16 : 30 до 18 : 00); Берлин (с 22 : 00 до 23 : 00, с 7 : 30 до 9 : 00).

4. ***«Тесты по географии».*** У Игоря в школе учитель географии предлагает учащимся тесты и выполнение каждого из них оценивает исходя из 100 баллов. Средняя оценка Игоря за четыре первых теста равна 60 баллам, а по пятому тесту он получил 80 баллов. Чему равна его средняя оценка за пять тестов по географии?

Ответ: 64.

5. ***«Книжные полки».*** Чтобы собрать один комплект книжных полок, плотнику нужны следующие детали:

– 4 длинных деревянных панели;

– 6 коротких деревянных панелей;

– 12 маленьких скоб;

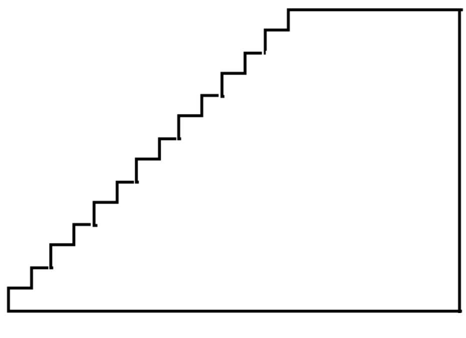
– 2 большие скобы;

– 14 шурупов.

У плотника есть 26 длинных деревянных панелей, 33 короткие панели, 200 маленьких скоб, 20 больших скоб и 510 шурупов. Какое наибольшее число комплектов книжных полок он может собрать из этих деталей?

Ответ: 5.

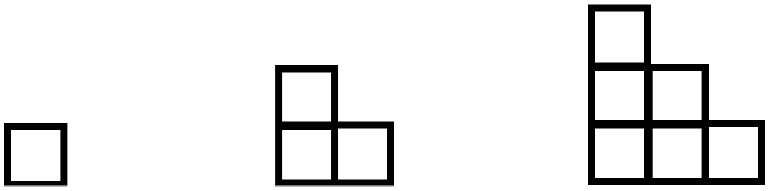
6. ***«Лестница».*** На рисунке изображена лестница с 14 ступеньками. Ее высота 252 см, длина 400 см.



Какова высота каждой из 14 ступенек?

Ответ: 18 см.

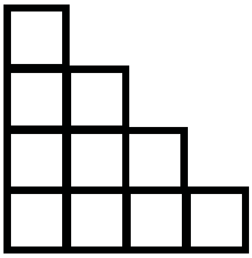
7. ***«Лесенки».*** Роберт рисует последовательность «лесенок», сложенных из квадратов. Ниже показаны эти построения.



Этап 1 Этап 2 Этап 3

Видно, что на этапе 1 он использовал один квадрат, на этапе 2 – три квадрата и на этапе 3 – шесть квадратов. Сколько квадратов он использует на этапе 4?

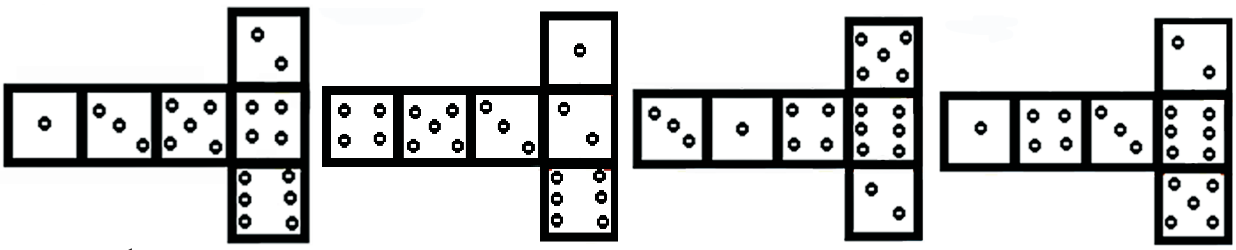
Ответ: 10 квадратов.



Этап 4

8. ***«Игральные кубики».*** Для игральных кубиков применяется следующее правило: сумма очков, изображенных на двух любых противоположных сторонах кубика, равна 7.

Вопрос. Вы можете сделать обычный игральный кубик, вырезая, складывая и склеивая кусочки картона. Это можно выполнить разными способами. Ниже изображены четыре развертки куба, на которые нанесены очки. Из каких разверток можно сложить кубик, у которого сумма очков на противоположных сторонах будет равна 7? Обведите ответ «Да» или «Нет» в каждой строке следующей таблицы.

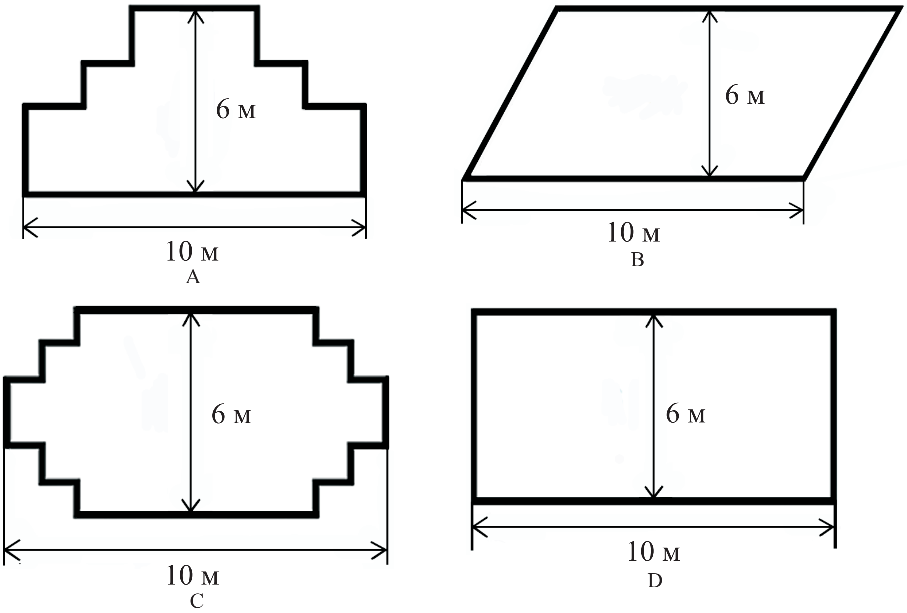


1 2 3 4

Развертка	Выполняется ли правило: сумма очков на противоположных сторонах кубика равна 7?
1	Да/нет
2	Да/нет
3	Да/нет
4	Да/нет

Ответ: Нет. Да. Да. Нет.

9. ***«Садовник».*** У садовника есть 32 м провода, которым он хочет обозначить на земле границу клумбы. Форму клумбы ему надо выбрать из следующих вариантов.

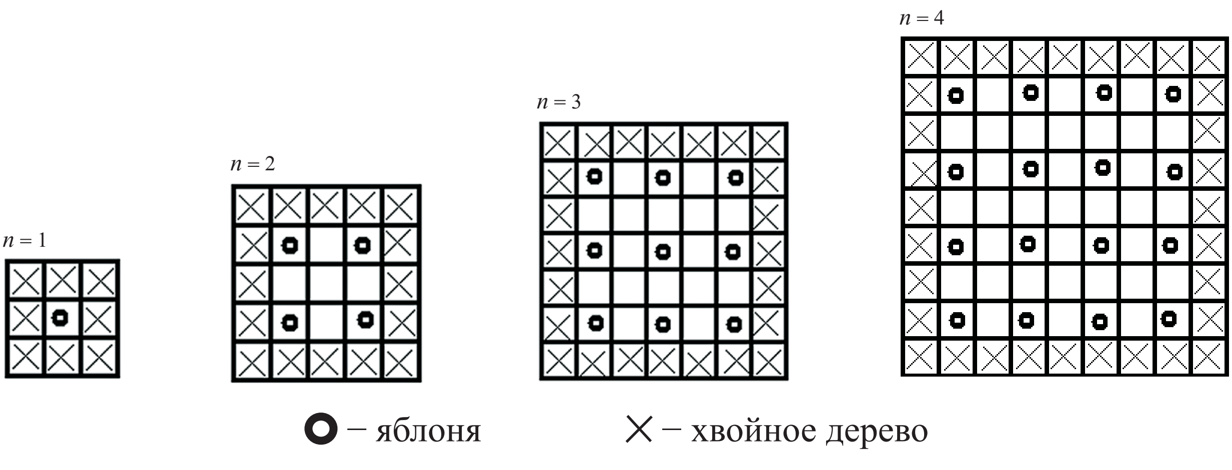


Обведите ответ «Да» или «Нет» около каждой формы клумбы в зависимости от того, хватит или не хватит садовнику 32 м провода, чтобы обозначить ее границу.

Форма клумбы	**Хватит ли 32 м провода, чтобы обозначить границу клумбы?**
A	Да/нет
B	Да/нет
C	Да/нет
D	Да/нет

Ответ: Да. Нет. Да. Да.

10. ***«Яблони».*** Фермер на своем садовом участке высаживает яблони в форме квадрата. Для защиты яблонь от ветра он сажает по краям участка хвойные деревья. Ниже на рисунке изображены схемы посадки яблонь и хвойных деревьев для нескольких значений n, где n – количество рядов высаженных яблонь. Эту последовательность можно продолжить для любого числа n.



а) Заполните таблицу.

n	**Количество яблонь**	**Количество хвойных деревьев**
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

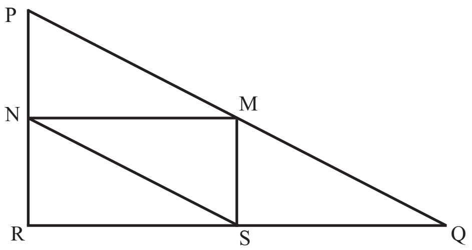
б) В рассмотренной выше последовательности количество посаженных яблонь и хвойных деревьев равно $8n$, где n – число рядов высаженных яблонь. Для какого значения n число яблонь будет равно числу посаженных вокруг них хвойных деревьев?

Ответ: 8.

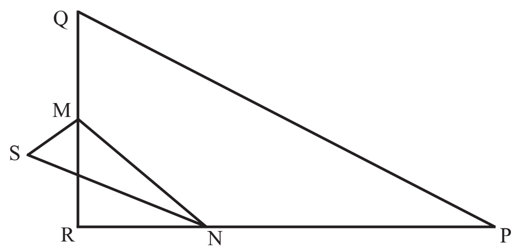
в) Предположим, что фермер решил постепенно увеличивать число рядов яблонь на своем участке. Что при этом будет увеличиваться быстрее: количество высаживаемых яблонь или количество хвойных деревьев?

Ответ: количество высаживаемых яблонь меньше количества хвойных деревьев при увеличении числа рядов яблонь с одного ряда до четырех, при дальнейшем увеличении числа рядов яблонь количество высаживаемых яблонь больше количества хвойных деревьев.

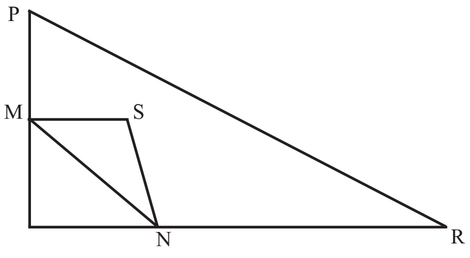
11. ***«Треугольники».*** Выберите фигуру согласно ее описанию. Треугольник PQR прямоугольный с прямым углом R. Сторона RQ меньше стороны PR. M – середина стороны PQ; N – середина стороны QR. S – точка внутри данного треугольника. Отрезок MN больше отрезка MS.



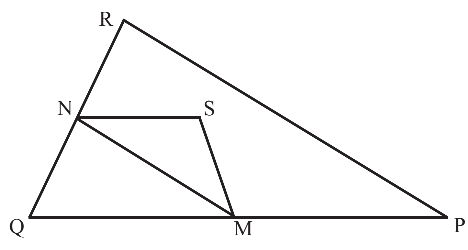
A



B



C



D

Ответ: D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башмаков, М. И.* Математика в кармане «Кенгуру» / М. И. Башмаков // Международные олимпиады школьников. – М. : Дрофа, 2010.

2. *Гуровиц, В. М.* Графы / В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина. – М. : МЦНМО, 2008.

3. *Екимова, М. А.* Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин. – М. : МЦНМО, 2007.

4. *Иванов, С. Г.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С. Г. Иванов, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2013.

5. *Кирик, Л. А.* Самостоятельные и контрольные работы по физике / Л. А. Кирик // Разноуровневые дидактические материалы : 7 класс. Механика. Давление жидкостей и газов. – М. : Илекса, Харьков : Гимназия, 1998.

6. *Смирнов, В. А.* Наглядная геометрия / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова, И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2013.

7. *Спивак, А. В.* Математический кружок : 6 –7 классы / А. В. Спивак. – М. : МЦНМО, 2009.

8. *Фоминых, Ю. Ф.* Прикладные задачи по алгебре для 7–9 классов : книга для учителя / Ю. Ф. Фоминых. – М. : Просвещение, 1999. – 112 с. : ил.

9. *Чулков, П. В.* Арифметические задачи / П. В. Чулков. – М. : МЦНМО, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Факультативный курс «За страницами учебника математики» 7 класс

Учебно-методическое пособие

Редактор *И. М. Морева*
Компьютерная верстка *Л. Г. Прилашкевич*

Оригинал-макет подписан в печать 05.08.2014 г.
Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 7,44. Тираж 200 экз. Заказ 2182.

ГБОУ ДПО «Нижегородский институт развития образования»
603122, Н. Новгород, ул. Ванеева, 203.
www.niro.nnov.ru

Отпечатано в издательском центре учебной
и учебно-методической литературы ГБОУ ДПО НИРО