Государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

И. Г. Малышев

ВВЕДЕНИЕ
В ТРИГОНОМЕТРИЮ

Предпрофильная подготовка
учащихся 8—9 классов по математике

Учебно-методическое пособие

Нижний Новгород
Нижегородский институт развития образования
2015

УДК 514(075.3)
ББК 22.151.0я72
М20

Автор пособия:
И. Г. Малышев, зав. кафедрой теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО, канд. техн. наук, доцент

Рецензенты:
Ю. Б. Великанов, канд. пед. наук, учитель математики высшей категории МАОУ СОШ № 187, заслуженный учитель школы РФ;
М. А. Мичасова, канд. пед. наук, доцент кафедры теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО

Рекомендовано к изданию
научно-методическим экспертным советом ГБОУ ДПО НИРО

Малышев, И. Г.
М20 Введение в тригонометрию. Предпрофильная подготовка учащихся 8—9 классов по математике : учебно-методическое пособие / И. Г. Малышев. — Н. Новгород: Нижегородский институт развития образования, 2015. — 48 с.

ISBN 978-5-7565-0637-2

Пособие содержит теоретический и дидактический материал по курсу тригонометрии в основной школе. Может использоваться как проведения факультатива в рамках предпрофильной подготовки учащихся 8—9 классов, так и в качестве учебного пособия по курсу тригонометрии.

Нестандартный подход к изучению тригонометрии, предложенный в данном пособии, будет интересен учителям математики и учащимся старших классов.

УДК 514(075.3)
ББК 22.151.0я72

ISBN 978-5-7565-0637-2

Содержание

Предисловие

В основу факультативного курса положены идеи, представленные в ряде статей автора, которые были опубликованы в педагогических периодических изданиях в 2008—2014 гг. [1—6]. В статье «ЕГЭ как важнейший элемент мотивации выпускников в повышении уровня геометрических знаний» [1] нами было рассмотрено положение с геометрией в школьном курсе математики, показана важность этого предмета для развития мышления школьника, его математической культуры. Критическое состояние, в котором оказалось школьное изучение геометрии на тот момент, и многочисленные выступления педагогов-математиков по этому поводу привели к серьезным структурным изменениям в выпускных экзаменах. Статус этой школьной дисциплины существенно повысился: теперь вопросы с геометрическим содержанием составляют треть всех заданий ЕГЭ и ОГЭ, более того, в ОГЭ геометрия составляет 40 % баллов в критериях оценивания.

Но в геометрии есть особый раздел, с которым учащийся сначала встречается в основной школе в курсе геометрии, а при переходе в старшую школу — в курсе алгебры и математического анализа. Этот наиболее интегрированный раздел школьной математики называется тригонометрия. Тригонометрия родом из астрономии и геометрии более чем двухтысячелетней давности. Эта область знания выросла из практики, в процессе решения конкретных практических задач в астрономии, мореплавании и составлении географических карт. Она получила развитие начиная с Клавдия Птолемея, составившего первые таблицы синусов, основывающиеся на его теореме о соотношении диагоналей и сторон четырехугольника, вписанного в окружность.

Когда-то в школах тригонометрию преподавали отдельным курсом [7], а в аттестате зрелости этот предмет занимал отдельную строчку. И это воспринималось как само собой разумеющееся — профессии инженера, морского офицера и артиллериста были высоко востребованы (в последних случаях от знания тригонометрии напрямую зависела человеческая жизнь). В наше время тригонометрия больше не рассматривается как самостоятельная ветвь математики. Важнейшая ее часть — учение о тригонометрических функциях — является частью более общего, построенного с единой точки зрения учения о функциях, изучаемых в математическом анализе; другая же часть — решение треугольников — рассматривается как глава геометрии. Но по количеству учебных часов, предусмотренных на изучение тригонометрии, она так и осталась самым большим разделом школьной математики. На этот раздел приходится в два раза больше часов, чем на любой другой, и только в два раза меньше, чем на геометрию, поэтому некоторые авторы учебников по алгебре для 10 класса выделяют главы по тригонометрии в отдельное пособие [8].

Если положение с изучением геометрии в школе в целом как-то стало исправляться, то с тригонометрией по-прежнему все сложно. По результатам ЕГЭ тригонометрия занимает второе место после геометрии по степени невыполнения заданий. Все принимают это к сведению, и каждый раз ФИПИ в анализе результатов и рекомендациях по итогам ЕГЭ отмечает этот печальный факт. В то же время проблемы с изучением тригонометрии приобретают хронический характер. В результате корректировки программы она оказалась изъята из учебных планов основной школы. Элементы тригонометрии только небольшими вкраплениями входят в геометрию 8 и 9 классов, а весь материал фактически попал в 10 класс, став для учеников достаточно абстрактным разделом алгебры. Классы с базовой математической нагрузкой не добирают тригонометрии более десяти часов по сравнению с тем, что было до введения стандарта в 2004 г. В прежней программе начала тригонометрии в алгебре изучались одновременно с теоремами синусов и косинусов в геометрии, а перед этим даже применялись некоторые формулы в задачах кинематики в курсе физики 9 класса. Вся третья четверть 9 класса была посвящена тригонометрии.

Как видим, если еще сто лет назад под тригонометрией понималось решение треугольников, то сейчас это оторванный от геометрии раздел, да еще изучаемый практически в одном классе. Как и геометрия, тригонометрия оказалась тем водоразделом, который отделяет учащихся с базовым уровнем достижений от учащихся с повышенным и высоким уровнем достижений планируемых результатов обучения.

Настоящий факультативный курс содержит теоретические и дидактические материалы по курсу тригонометрии основной школы. Кроме того, предложенный в нем нестандартный подход к тригонометрии, думается, будет интересен и учителям математики, и учащимся старших классов.

При написании курса автор исходил из следующих ключевых идей:

✓ Тригонометрия — раздел геометрии и одновременно математического анализа, поэтому она является сложнейшим разделом школьной математики.

✓ Исключение алгебраической части тригонометрии («Тригонометрические функции направленного угла» и «Формулы сложения для тригонометрических функций») из основной школы породило проблемы, приведшие к ухудшению результатов не только в обучении тригонометрии, но и в других темах школьного курса математики в старшей школе.

✓ Геометризация знаний, в данном случае привязка тригонометрии к геометрии, позволит восстановить историческую справедливость (поскольку тригонометрия является разделом геометрии и выросла из нее) и улучшить ситуацию с практикоориентированными заданиями в школьной математике (ведь, по сути, геометрия есть практикоориентированный раздел математики).

✓ Учитывая, что в некоторых УМК тригонометрия сохранена в основной школе в полном объеме [9], данный факультативный курс может быть предложен и как учебное пособие по этой теме, и как факультативный материал.

Глава I. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Определение тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, где $\angle C = 90^0$ (рис. 1).

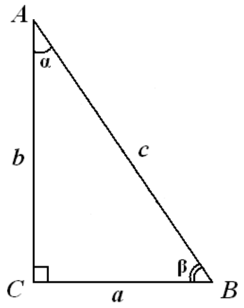

Рис. 1

∗ *Синусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

∗ *Косинусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

∗ *Тангенсом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему катету: $tg\alpha = \frac{a}{b}$.

∗ *Котангенсом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему катету: $ctg\alpha = \frac{b}{a}$.

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются тригонометрическими функциями острого угла.

Из определений следуют равенства: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, $\sin\alpha = \sin(90^0 - \beta) = \cos\beta$, $\cos\alpha = \cos(90^0 - \beta) = \sin\beta$, $tg\alpha = tg(90^0 - \beta) = ctg\beta$, $ctg\alpha = ctg(90^0 - \beta) = tg\beta$.

Кроме того, из определения синуса и косинуса и неравенства для сторон треугольника следуют ограничения при всех α из отрезка $\left[0;\, 90^0\right]$: $0 \le \sin\alpha \le 1$, $0 \le \cos\alpha \le 1$.

Принято, что значения $\cos\alpha = 1\left(\sin\alpha = 0\right)$ или $\sin\alpha = 1\left(\cos\alpha = 0\right)$ соответствуют предельному положению, когда треугольник вырождается в отрезок и соответствующий катет равен гипотенузе.

Тригонометрические функции зависят только от угла, так как определяются численным значением безразмерной дроби.

Так как площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне, то, исходя из определения синуса угла, получаем следующую важную для дальнейших преобразований формулу для вычисления площади остроугольного треугольника (рис. 2): площадь $S = \frac{1}{2} BN \cdot AC$. Так как в прямоугольном треугольнике ABN высота $BN = c \cdot \sin\alpha$, то $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$.

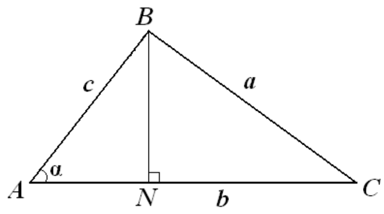

Рис. 2

§ 2. Определение тригонометрических функций двойного угла. Теорема Пифагора

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 3), где CO — медиана. В этом случае точка O — центр описанной окружности. Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle COB = 2\alpha$. Так как площадь треугольника COB равна половине площади треугольника ABC, то имеем следующее равенство: $\frac{1}{4} bc \sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin 2\alpha$. Учитывая, что $b = c \cdot \cos\alpha$, получаем *формулу синуса двойного угла*:

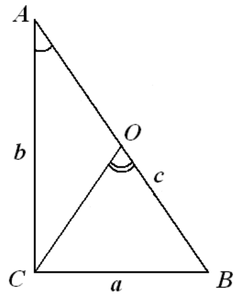

Рис. 3

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha .$$

Следующим необходимым дополнением к решению треугольников является *формула для вычисления биссектрисы*. Данная формула получается из выражения $S_{ABN} + S_{BNC} = S_{ABC}$ (рис. 4) с учетом формулы для синуса двойного угла, полученной выше. Итак, $\frac{1}{2} cl \sin\alpha + \frac{1}{2} al \sin\alpha = \frac{1}{2} ca \sin 2\alpha$, или

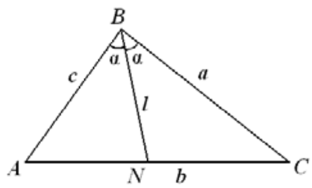

Рис. 4

$$\ell = \frac{2ac \cdot \cos\alpha}{a + c} .$$

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник с биссектрисой AP (рис. 5). Воспользуемся формулой для биссектрисы $AP = \frac{2b \cdot c \cdot \cos\alpha}{b + c}$. Учитывая, что $AP = \frac{b}{\cos\alpha}$, $AB = \frac{b}{\cos 2\alpha}$, получаем *формулу косинуса двойного угла*:

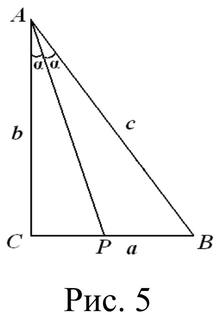

Рис. 5

$$\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha .$$

Теорема Пифагора

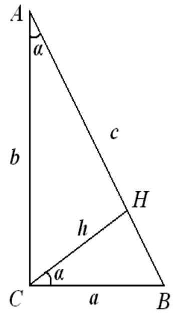

Рис. 6

Теорема Пифагора имеет множество доказательств. Если после темы «Площади» ввести понятия тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике, то одно из доказательств может быть следующим.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 6), где проведена высота на гипотенузу. Имеем $\cos\alpha = \frac{AH}{b} = \frac{b}{c}$, $\sin\alpha = \frac{BH}{a} = \frac{a}{c}$. Отсюда следуют равенства $AH \cdot c = b^2$ и $BH \cdot c = a^2$, складывая которые получаем *теорему Пифагора*:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

и ее следствие для тригонометрических функций — *основное тригонометрическое тождество*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Из основного тождества следуют еще два, если разделить тождество на квадрат косинуса или синуса угла: $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. Учитывая тождество, *формулы двойного угла для косинуса* имеют следующий вид:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Возможно получение еще ряда полезных тригонометрических формул:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha},$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Таким образом, предполагая, что формулы верны для всех значений α из отрезка $[0;\ 90^0]$, получаем возможность определить тригонометрические функции на промежутке $[90^0;\ 180^0]$.

§ 3. Вычисление тригонометрических функций некоторых углов

При решении треугольников, а также в теме «Правильные многоугольники» довольно часто встречаются тригонометрические функции острых углов 15, 22,5, 30, 45, 60, 75°. Последовательно определим значения функций исходя из знаний планиметрии и полученных выше формул.

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной равной *a*. Высота делит треугольник на два равных прямоугольных с углами 30 и 60°. Так как напротив угла в 30° лежит катет равный половине стороны, то $\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \cos 60^0$, а учитывая, что высота равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, имеем и $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом, равным *a*. В этом случае гипотенуза равна $a\sqrt{2}$. Таким образом, $\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0$. Воспользуемся формулами двойного аргумента и найдем тригонометрические функции угла 15 и 22,5°:

$$\cos^2 15^0 = \frac{1+\cos 30^0}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{8+2\sqrt{12}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 \quad \cos 15^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Аналогично, $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75^0$ и $tg 15^0 = 2-\sqrt{3} = ctg 75^0$.

Для $22{,}5^0$ имеем $\cos^2 22{,}5^0 = \frac{1+\cos 45^0}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ и $\sin^2 22{,}5^0 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Далее можно воспользоваться формулами двойного угла и определить значения функций углов 90°, 120°, 150°, 180°.

Таблица для тригонометрических функций имеет вид:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
22,5°	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90°	1	0	-	0
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
180°	0	-1	0	-

Рассмотрим теперь треугольник, у которого $\angle CAB$ разделен на n равных частей (рис. 7). Воспользуемся формулой для биссектрисы AQ в ΔABP, причем принято, что $\angle A = n\cdot\alpha$: $AQ = \dfrac{2AP\cdot AB\cdot\cos\alpha}{AP+AB}$.

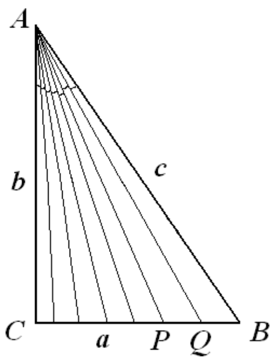

Рис. 7

Учитывая, что $AQ = \dfrac{b}{\cos(n-1)\alpha}$, $AP = \dfrac{b}{\cos(n-2)\alpha}$, $AB = \dfrac{b}{\cos n\alpha}$, *получаем формулу для косинусов:*

$$\cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha = 2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha .$$

В случае если $n=3$ имеем $\cos 3\alpha = 2\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha - \cos\alpha$ или $\cos 3\alpha = \cos\alpha\cdot(4\cos^2\alpha - 3)$.

Таким образом, появляется возможность получить тригонометрические функции угла 18° и кратных ему 36; 54; 72°.

Например, $\sin 36^0 = \cos 54^0 = \cos(3\cdot 18^0)$;

$2\sin 18^0 \cos 18^0 = 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0$;

$4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0$;

$\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^0$;

$\cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^0$;

$\cos 108^0 = 1 - 2\sin^2 54^0 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$;

$\cos 144^0 = 2\cos^2 72^0 - 1 = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Отметим, что для получения формулы тройного угла достаточно было рассмотреть трисекцию угла в треугольнике вместо деления угла на n частей.

§ 4. Пифагоровы треугольники

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором высота и основание выражены в натуральных числах m и $2n$ (рис. 8). Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 2mn = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot AC$. Откуда высота BP, опущенная на боковую сторону, равна $BP = \frac{2mn}{\sqrt{n^2 + m^2}}$. Учитывая, что $CB = \sqrt{m^2 + n^2}$, получаем по теореме Пифагора значение катета $CP = \frac{m^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + m^2}}$.

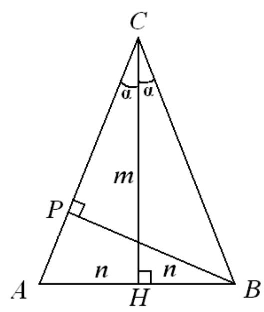

Рис. 8

Таким образом, если домножить все стороны $\Delta\ CPB$ на масштабный коэффициент $\sqrt{m^2 + n^2}$, получим так называемый *пифагоровый треугольник*, в котором стороны выражаются в натуральных числах: $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$. В этом же треугольнике $\sin 2\alpha = \frac{2mn}{n^2 + m^2}$, $\cos 2\alpha = \frac{m^2 - n^2}{n^2 + m^2}$. Так как тангенс острого угла в ΔCBH равен $tg\alpha = \frac{n}{m}$, то получаем еще и формулы для синуса и косинуса угла при вершине треугольника, выраженные через тангенс половинного угла (что было уже получено в § 2):

$$\sin 2\alpha = \frac{2mn}{n^2 + m^2} = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha},\ \cos 2\alpha = \frac{m^2 - n^2}{n^2 + m^2} = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

Ниже приведена таблица некоторых известных пифагоровых треугольников.

a	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	60
b	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	91
c	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	109

Глава II. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Формулы сложения в треугольнике

Наиболее значимая тема в тригонометрии — это тригонометрические формулы сложения. Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC*, где проведен отрезок из вершины *A* до противоположного катета. Площадь ΔABC (рис. 9) равна сумме площадей треугольников *ACP* и *APB*.

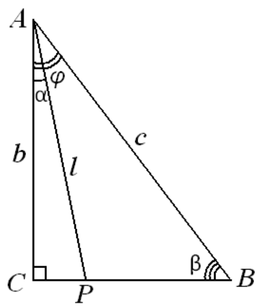

Рис. 9

Имеем, $\frac{1}{2}bc\sin\varphi = \frac{1}{2}bl\sin\alpha + \frac{1}{2}lc\sin(\varphi-\alpha)$. Учитывая, что $l = \frac{b}{\cos\alpha}$ и $c = \frac{b}{\cos\varphi}$, получаем $tg\varphi - tg\alpha = \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}$, а после приведения к общему знаменателю, формулу:

$$\sin(\varphi-\alpha) = \sin\varphi\cdot\cos\alpha - \cos\varphi\cdot\sin\alpha\ .$$

Учитывая формулы приведения в прямоугольном треугольнике и то, что $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$, получаем

$$\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\cdot\sin\alpha\ .$$

Если перемножить полученные выше формулы $\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cdot\cos\alpha - \cos\beta\cdot\sin\alpha$ и $\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\cdot\sin\alpha$, то, воспользовавшись формулами двойного аргумента, которые ранее также были получены из прямоугольного треугольника, приходим к *формуле разности синусов*:

$$\sin 2\beta - \sin 2\alpha = 2\cdot\sin(\beta-\alpha)\cdot\cos(\beta+\alpha)\,.$$

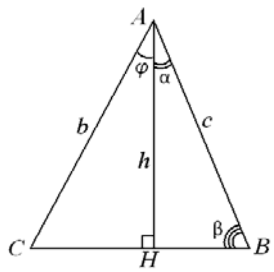

Рис. 10

Несколько иные формулы можно получить, если рассматривать треугольник, в котором проведена высота к одной из сторон (рис. 10). В этом случае имеем:

$$b = \frac{h}{\cos\varphi},\ c = \frac{h}{\cos\alpha},\ \frac{1}{2}bc\sin(\varphi+\alpha) = \frac{1}{2}bh\sin\varphi + \frac{1}{2}hc\sin\alpha\ .$$

В итоге получаем формулы

$$tg\varphi + tg\alpha = \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos\alpha \cdot \cos\varphi}$$

и

$$\sin(\varphi + \alpha) = \sin\varphi \cdot \cos\alpha + \cos\varphi \cdot \sin\alpha .$$

Учитывая, что $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, получаем формулу

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\alpha .$$

Если перемножить полученные выше формулы $\sin(\beta + \alpha) = \sin\beta \cdot \cos\alpha + \cos\beta \cdot \sin\alpha$ и $\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\alpha$, то, воспользовавшись формулами двойного аргумента, приходим к *формуле суммы синусов*: $\sin 2\beta + \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin(\beta + \alpha) \cdot \cos(\beta - \alpha)$.

Аналогично перемножая $\cos(\beta + \alpha)$ и $\cos(\beta - \alpha)$, получаем формулу: $\cos 2\beta + \cos 2\alpha = 2 \cdot \cos(\beta + \alpha) \cdot \cos(\beta - \alpha)$, а перемножая $\sin(\beta + \alpha)$ и $\sin(\beta - \alpha)$, формулу — $\cos 2\alpha - \cos 2\beta = 2 \cdot \sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)$. Складывая формулы $\sin(\beta + \alpha) = \sin\beta \cdot \cos\alpha + \cos\beta \cdot \sin\alpha$ и $\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta \cdot \cos\alpha - \cos\beta \cdot \sin\alpha$, получаем следующую формулу:

$$2\sin\beta \cdot \cos\alpha = \sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha).$$

Складывая формулы $\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \sin\alpha$ и $\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\alpha$, получаем следующую формулу:

$$2\cos\beta \cdot \cos\alpha = \cos(\beta + \alpha) + \cos(\beta - \alpha),$$

вычитая:

$$2\sin\beta \cdot \sin\alpha = \cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha).$$

§ 2. Формулы сложения в трапеции

Рассмотрим выражение $a\sin\alpha + b\cos\alpha$. На рис. 11 представлена трапеция, в которой высота *DE* выражается суммой отрезков *CD* и *CE*, являющихся катетами прямоугольных треугольников *BCD* и *ACE*, в которых гипотенузы — отрезки *a* и *b*. Высота трапеции равна также отрезку *AH*, причем

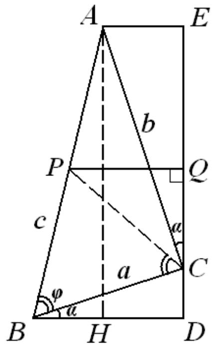

Рис. 11

$AH = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(\alpha+\varphi)$. Таким образом, данная трапеция является хорошей иллюстрацией преобразования тригонометрического выражения с помощью введения вспомогательного аргумента:

$$ED = AH \le AB$$

или

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(\alpha+\varphi) \le \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Причем, роль вспомогательного аргумента выполняет угол в прямоугольном треугольнике *ABC*, где $\cos\varphi = \dfrac{a}{c}$, а $\sin\varphi = \dfrac{b}{c}$.

Кроме этой формулы, трапеция иллюстрирует и другую формулу. Если провести среднюю линию в трапеции, то она равна (кроме полусуммы оснований) произведению отрезка *PC* на косинус угла *CPQ*. Медиана *PC* ΔABC = $=\dfrac{c}{2}$, а $\angle CPQ$ = $\varphi-\alpha$. Таким образом, убрав в знаменателе 2, получаем формулу

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(\varphi-\alpha) \le \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Если ввести в рассмотрение равнобедренную трапецию, отразив трапецию *ABDE* относительно высоты *ED*, то высота этой трапеции остается $AH = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(\alpha+\varphi)$, а ее средняя линия будет равна $\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(\varphi-\alpha)$. Из изложенного выше выстраивается определенный алгоритм решения уравнений вида $a\sin x + b\cos x = p$.

Практическая работа по решению уравнений вида $a\sin x + b\cos x = p$

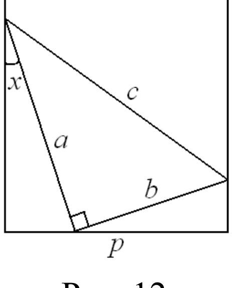

Рис. 12

Из бумаги вырезаем прямоугольные треугольники с заданными катетами *a* и *b* и далее вписываем в заданную полосу шириной *p* (рис. 12). После этого транспортиром измеряем угол, либо определяем тангенс угла *x* по измеренным отрезкам и вычисляем угол по калькулятору. Конечно, рассматриваем только острые углы и учитываем ограничения по параметру *p*: $b < p < c$, где *b* — меньший катет.

Глава III. ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

§ 1. Следствие из основного тригонометрического тождества

В § 2 гл. I нами было получено тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, которое соответствует *уравнению окружности* $x^2 + y^2 = 1$ *единичного радиуса*. При этом координаты точки на единичной окружности есть значения синуса и косинуса угла поворота радиуса на угол α (рис. 13).

Удобно принять за начало отсчета угла точку с координатами (1; 0). Таким образом угол может принимать любые значения в диапазоне $[0^0;\ 360^0]$, а значения тригонометрических функций могут иметь при этом любой знак. Более того, так как координаты повторяются через 360°, то возможны следующие равенства: $\sin\alpha = \sin(\alpha + 360^0 \cdot n)$, $\cos\alpha = \cos(\alpha + 360^0 \cdot n)$, где $n \in N$.

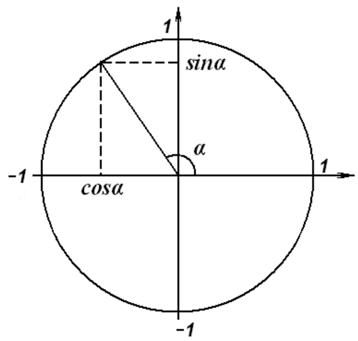

Рис. 13

Так как длина дуги в окружности непосредственно связана с центральным углом, то имеет смысл измерять угол длиной дуги. Длина дуги у окружности единичного радиуса для угла α, измеряемого в градусах, равна $\ell = \frac{2\pi}{360^0}\cdot\alpha$ или $\ell = \frac{\pi\cdot\alpha}{180^0}$.

Таким образом, углу 45^0 соответствует дуга $\ell = \frac{\pi}{4}$, а углу 60° соответствует дуга $\ell = \frac{\pi}{3}$. Дуге, равной 1, соответствует угол $\alpha = \frac{180^0}{\pi} \approx 57{,}29578^0$. В единичной окружности эта дуга равна радиусу. Но и в произвольной окружности из формулы для длины дуги $\ell = \frac{2\pi R}{360^0}\cdot\alpha$ следует, что дуге, равной радиусу соответствует угол $\alpha \approx 57{,}29578^0$. Такой центральный угол, опирающийся на дугу равную радиусу, называют радианом. Запись «$\pi\ \textit{радиан} = 180^0$» означает то же, что и в физике перевод из одной системы единиц в другую.

Используя результаты § 1 гл. II, в котором выводятся формулы сложения, и учитывая, что каждому значению синуса или косинуса на осях координат соответствует два значения угла в диапазоне $[0^0;\ 360^0]$, можно сформулировать так называемые *формулы приведения*. Например, $\sin(90^0 \pm \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(270^0 \pm \alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$.

Подобные формулы можно написать и для других тригонометрических функций. При этом их можно обобщить, сформулировав правила. Сначала выясняем четверть, в которой находится угол, предполагая, что α имеет небольшое значение. Потом называем знак исходной функции в данной четверти. И наконец, называем функцию в зависимости от того какое число стоит — 90, 180, 270 или 360°.

§ 2. Теорема синусов в треугольнике

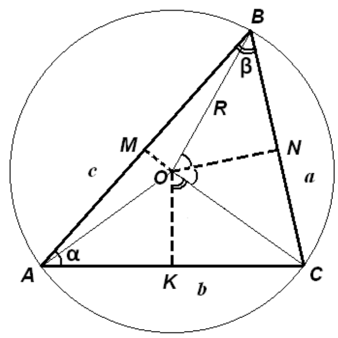

Рис. 14

В гл. I была получена формула для площади треугольника $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$, которую легко продолжить и получить равенство: $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}ba \cdot \sin\gamma$.

Разделив почленно на произведение сторон, получаем пропорциональность сторон и синусов противолежащих углов в треугольнике:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Данное выражение имеет продолжение. На рис. 14 и 15 показаны треугольники, вписанные в окружность радиуса *R*. Определим сторону в случае остроугольного треугольника (рис. 14). В ΔOBC отрезок *ON* есть серединный перпендикуляр, а $\angle BON$ и $\angle NOC$ равны вписанному $\angle BAC$, поэтому $a = 2R\sin\alpha$. Записав подобные равенства для всех сторон треугольника, получаем следующее *выражение для теоремы синусов*:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

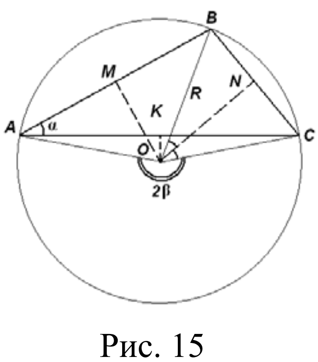

Рис. 15

В случае тупоугольного треугольника (рис. 15) в ΔOAC отрезок *OK* есть серединный перпендикуляр, а $\angle COK$ и $\angle KOA$ равны $\frac{360^0 - 2\beta}{2}$, поэтому $b = 2R\sin\left(180^0 - \beta\right) = 2R\sin\beta$.

Таким образом, получаем такое же выражение для теоремы синусов и следующую формулировку: ***стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов и равны произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла.***

§ 3. Теорема косинусов в треугольнике

Рассмотрим ΔABC (рис. 16), в котором на сторону AC опущен перпендикуляр BH и $\angle BAC$ острый. Запишем теорему Пифагора для ΔBCH: $BH^2 + CH^2 = BC^2$ или $(b - c \cdot \cos\alpha)^2 + (c \cdot \sin\alpha)^2 = a^2$. После преобразований получаем формулу:

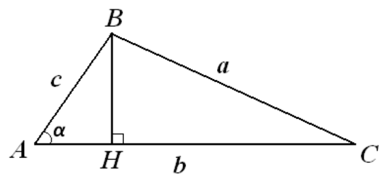

Рис. 16

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Рассмотрим теперь треугольник (рис. 17), в котором $\angle BAC$ тупой. Запишем теорему Пифагора для ΔBAH: $BH^2 + AH^2 = BA^2$ или $(b + c \cdot \cos(180^0 - \alpha))^2 + (c \cdot \sin\alpha)^2 = a^2$.

После преобразований получаем ту же формулу для квадрата стороны BC.

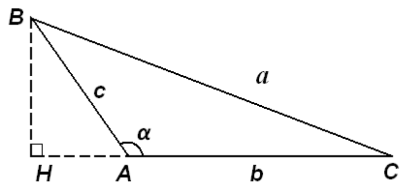

Рис. 17

Таким образом, имеем следующую формулировку теоремы косинусов: ***квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.***

Глава IV. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

§ 1. Треугольник в треугольнике

Многие задачи планиметрии, особенно задачи С4 из ЕГЭ, имеют общее решение в виде удобной формулы, из которой при конкретных значениях параметров, входящих в выражение, можно получить какой-либо численный результат. Попробуем получить общую формулу для площади в случае вписанного в треугольник треугольника.

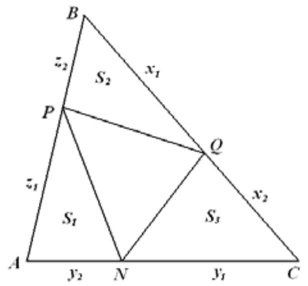

Рис. 18

Рассмотрим ΔABC, у которого на сторонах AB, BC и AC отмечены соответственно точки P, Q, N и соответствующие отрезки обозначены так, как на рис. 18.

Так как площади треугольников, имеющих равный угол, относятся как произведения сторон, заключающий этот угол, то выпишем площади треугольников S_1, S_2, S_3 через стороны и площадь исходного ΔABC: $S_1 = S \cdot \frac{z_1 y_2}{bc}$,

$S_2 = S \cdot \frac{z_2 x_1}{ac}$, $S_1 = S \cdot \frac{z_1 y_2}{bc}$.

Площадь ΔPQN найдем из следующей формулы: $S_{PQN} = S \cdot (1 - S_1 - S_2 - S_3)$. Воспользовавшись тем, что стороны треугольника представляют собой суммы соответствующих отрезков, получим *выражение для площади треугольника PQN*:

$$S_{PQN} = S \cdot \frac{x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2}{abc}.$$

Применим полученную таким образом формулу в частных случаях:

1. Пусть P, Q, N — основания медиан.

В этом случае $S_{PQN} = S \cdot \frac{2\frac{a}{2}\frac{b}{2}\frac{c}{2}}{abc} = \frac{S}{4}$.

2. Пусть P, Q, N — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

На рис. 19 представлен треугольник, в который вписана окружность радиуса r. Учитывая свойства касательных к окружности, имеем следующие равенства: $z = b - x = a - y$ и $x + y = c$. Откуда следует $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. В обозначениях рис. 18 имеем $x_1 = z_2 = p - b$, $y_1 = x_2 = p - c$, $z_1 = y_2 = p - a$. Таким образом, площадь $S_{PQN} = S \cdot \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = S \cdot \frac{r}{2R}$. Учитывая, что

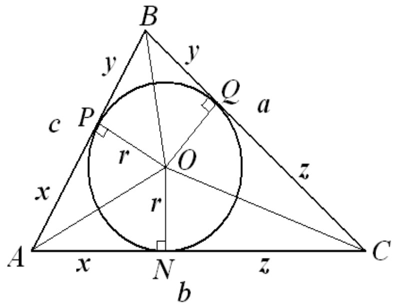

Рис. 19

отрезки можно выразить через радиус вписанной окружности и углы треугольника по формулам: $x_1 = z_2 = r \cdot ctg\frac{\beta}{2}$, $y_1 = x_2 = r \cdot ctg\frac{\gamma}{2}$, $z_1 = y_2 = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$, получаем следующий вариант формулы для площади треугольника *PQN* $S_{PQN} = r^2 \cdot \frac{r}{2R} \cdot ctg\frac{\alpha}{2} ctg\frac{\beta}{2} ctg\frac{\gamma}{2}$. Так как площадь Δ*PQN* можно выразить через сумму треугольников *PQO*, *QNO*, *PON* по формуле $\frac{1}{2} r^2 (\sin(180^0 - \alpha) + \sin(180^0 - \beta) + \sin(180^0 - \gamma))$, то, приравняв эти выражения, получаем одну из тригонометрических формул:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{r}{R} \cdot ctg\frac{\alpha}{2} ctg\frac{\beta}{2} ctg\frac{\gamma}{2}.$$

Учитывая, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ (один из вариантов вывода этой формулы представлен ниже), получаем *связь радиусов окружностей*

$$r = 4R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

3. Пусть *PQN* — это ортотреугольник (рис. 20), т. е. треугольник, вершины которого являются основаниями высот Δ*ABC* (в данном случае остроугольного треугольника). Четырехугольник *BPOQ* можно вписать в окружность, следовательно, ∠*BQP* = ∠*BOP*. Так как $\angle BOP = 90^0 - \angle NBA = \angle BAC$, то Δ*BPQ* ~ Δ*ABC* по двум углам. Аналогично Δ*APN* ~ Δ*ABC* и Δ*NQC* ~ Δ*ABC*. Из подобия Δ*APN* и Δ*ABC* следует равенство: $\frac{PN}{a} = \frac{AP}{b} = \frac{AN}{c} = \cos\alpha$.

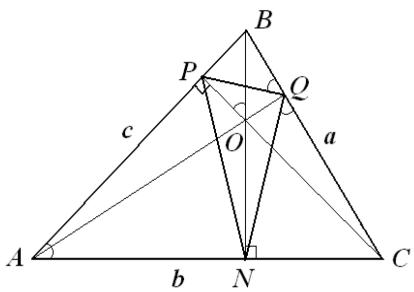

Рис. 20

Учитывая, что косинусы углов треугольника являются коэффициентами подобия, получаем *формулу площади ортотреугольника*: $S_{PQN} = S\cdot(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)$.

С другой стороны, отрезки, обозначенные на рис. 18, записываются через стороны исходного треугольника и те же косинусы углов, а именно: $x_1 = c\cdot\cos\beta$, $x_2 = b\cdot\cos\gamma$, $y_1 = a\cdot\cos\gamma$, $y_2 = c\cdot\cos\alpha$, $z_1 = b\cdot\cos\alpha$, $z_2 = a\cdot\cos\beta$. Подставляя эти отрезки в полученную в начале формулу площади, получаем следующий результат: $S_{PQN} = 2S\cdot\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Приравнивая обе формулы для площади ΔPQN, получаем *одно из тригонометрических тождеств в треугольнике*:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

либо

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2.$$

В следующей главе получим и другие тригонометрические формулы при решении планиметрических задач в треугольнике.

§ 2. Тригонометрические тождества в треугольнике

Многие тригонометрические тождества возникли не сами по себе, а из конкретных геометрических задач. Сама тема тригонометрических неравенств и тождеств в треугольнике в современных учебниках слабо отражена, хотя когда-то им посвящали целые разделы, не говоря о том, что сама тригонометрия была отдельной строкой в аттестате зрелости. Ниже доказаны несколько основных тригонометрических тождеств в треугольнике; рассмотрены случаи вписанной окружности в треугольник, описанной окружности и случай ортотреугольника. *В основе всех доказательств лежит формула площади треугольника через две стороны и синус угла между ними.*

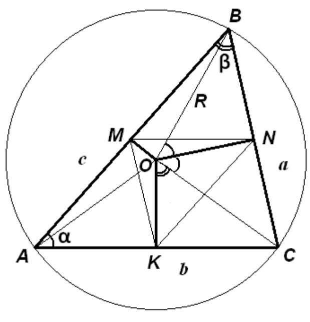

Рис. 21

На рис. 21 представлен треугольник, вписанный в окружность радиуса *R*. Площадь треугольника *ABC* равна сумме площадей треугольников *AOB*, *AOC* и *BOC*. Учитывая, что стороны треугольников есть радиусы описанной окружности, а углы между ними есть удвоенные углы исходного треугольника, имеем следующее равенство:

$$\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}R^2\sin 2\beta+\frac{1}{2}R^2\sin 2\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Откуда получаем *первое тождество в треугольнике*:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \,.$$

Воспользовавшись формулой синуса двойного угла и разделив тождество на произведение синусов, получаем следующее *тождество*:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} = 2\,.$$

Площадь треугольника *ABC* может быть получена также суммированием площадей четырехугольников *AMOK*, *BMON* и *CKON*. Рассмотрим четырехугольник *CKON*. Он состоит из двух треугольников: *KON* и *CKN*, площади которых равны $\frac{1}{2}ON \cdot OK \cdot \sin(180^0 - \gamma) = \frac{1}{2}ON \cdot OK \cdot \sin\gamma$ и $\frac{1}{2}CK \cdot CN \cdot \sin\gamma$ соответственно. Стороны четырехугольника определяются радиусом и известными углами в прямоугольных треугольниках *COK* и *CON*. Такое же положение и в других четырехугольниках. Таким образом, можно составить равенство:

$$\frac{1}{2} R\cos\alpha \cdot R\cos\beta \cdot \sin\gamma + \frac{1}{2} R\sin\alpha \cdot R\sin\beta \cdot \sin\gamma + \frac{1}{2} R\cos\alpha \cdot R\cos\gamma \cdot \sin\beta +$$

$$+ \frac{1}{2} R\sin\alpha \cdot R\sin\beta \cdot \sin\gamma + \frac{1}{2} R\cos\beta \cdot R\cos\gamma \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} R\sin\alpha \cdot R\sin\beta \cdot \sin\gamma =$$

$$= 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

После небольшого преобразования, получаем следующее равенство:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \sin\alpha = \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma,$$

из которого следует *тождество*:

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma\,.$$

Но не только геометрия помогает сформулировать тригонометрическое тождество, но и тождества помогают получить хорошие геометрические равенства. Например, воспользовавшись первым из доказанных тождеств, можно получить в остроугольном треугольнике со сторонами *a*, *b* и *c* периметр ортотреугольника, т. е. треугольника, образованного основаниями его высот (рис. 22).

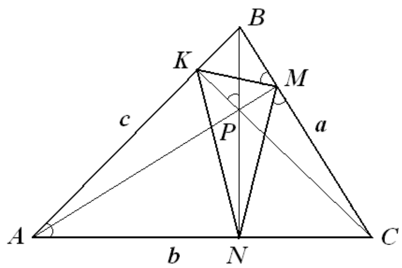

Рис. 22

Пусть в треугольнике *ABC* точки *K*, *M*, *N* — основания высот, точка *P* — ортоцентр. Четырехугольник *BMPK* можно вписать в окружность, следовательно, углы *BMK* и *BPK* равны. Так как $\angle BPK = 90^0 - \angle KBP = \angle BAC$, то $\Delta\ BMK \sim \Delta\ ABC$ по двум углам. Аналогично $\Delta\ AKN \sim \Delta\ ABC$ и $\Delta\ MNC \sim \Delta\ ABC$. Из подобия $\Delta\ AKN$ и $\Delta\ ABC$ следует равенство: $\frac{KN}{a} = \frac{AK}{b} = \frac{AN}{c} = \cos\alpha$.

Таким образом, $KN = a\cos\alpha$ и $MN = c\cos\gamma$ и $KM = b\cos\beta$. Учитывая, что стороны треугольника выражаем из теоремы синусов через радиус описанной окружности и синусы углов, то периметр треугольника KMN равен $P_{ort} = 2R\sin\alpha\cos\alpha + 2R\sin\beta\cos\beta + 2R\sin\gamma\cos\gamma = R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$..

Из первого тождества следует равенство $P_{ort} = 4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{2S}{R} = P_{ABC}\frac{r}{R}$, где r — радиус вписанной в ΔABC окружности. Таким образом, периметр ΔKMN равен периметру ΔABC, умноженному на отношение радиусов вписанной в ΔABC и описанной вокруг него окружностей.

Следующие тождества получаются в случае вписанной в треугольник окружности радиуса r (рис. 23).

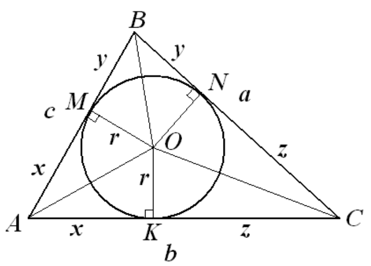

Рис. 23

Учитывая свойства касательных к окружности, имеем следующие равенства: $z = b - x = a - y$ и $x + y = c$. Откуда следует $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $z = \frac{b+a-c}{2}$. Таким образом, произведение этих отрезков на полупериметр дает квадрат площади треугольника: $S^2 = pxyz$.

Учитывая, что каждый из отрезков связан с радиусом вписанной окружности по формулам $x = r\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$, $y = r\cdot ctg\frac{\beta}{2}$, $z = r\cdot ctg\frac{\gamma}{2}$, получаем формулу площади треугольника в виде $S = r^2\cdot ctg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\beta}{2}\cdot ctg\frac{\gamma}{2}$. Площадь треугольника можно получить суммированием площадей четырехугольников $AMOK$, $MBNO$, $KCNO$: $S_{AMOK} + S_{MBNO} + S_{KCNO} = xr + yr + zr = r^2\left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\gamma}{2}\right)$.Таким образом, получаем следующее *тождество*:

$$ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\gamma}{2} = ctg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\beta}{2}\cdot ctg\frac{\gamma}{2}.$$

Но площадь треугольника можно получить и суммированием площадей треугольников AOC, BOC, AOB. Так как $\angle AOC$ равен $90^0 + \frac{\beta}{2}$, то $S_{AOC} = \frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin\left(90^0 + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$. Аналогичным образом имеем другие площади. В результате получаем *тождество*:

$$\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}=2\cdot ctg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\beta}{2}\cdot ctg\frac{\gamma}{2}$$

или

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

§ 3. Тригонометрические тождества в четырехугольнике

В предыдущем параграфе было показано, что многие тригонометрические тождества возникли не сами по себе, а из конкретных геометрических задач, в частности, из разных представлений формул площади треугольника. Такая же ситуация характерна и для тригонометрических тождеств в четырехугольнике. Правда, количество этих формул в четыре раза меньше, чем в треугольнике. Получим некоторые из них, используя для этого рис. 24. В соответствии с рис. 24 центральные углы при вершине O равны:

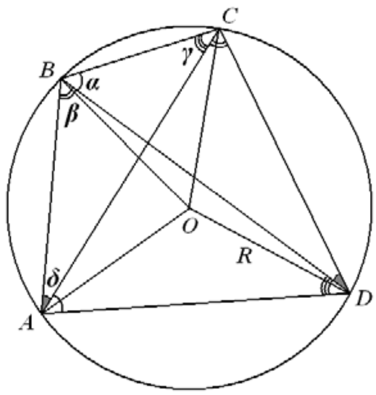

Рис. 24

$$\angle COD=2\alpha,\quad \angle AOD=2\beta,\quad \angle AOB=2\gamma,\quad \angle COB=2\delta,$$

причем $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi.$ (1)

Таким образом, площадь четырехугольника

$S=\frac{1}{2}R^2(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma+\sin2\delta)$. (2)

С другой стороны, площадь можно получить и из суммы треугольников:

$$S=S_{ABC}+S_{CDA}=2R^2(\sin\delta\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\gamma+\delta)),$$

$$S=S_{BCD}+S_{ABD}=2R^2(\sin\delta\cdot\sin\alpha\cdot\sin(\gamma+\beta)+\sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\delta)).$$

Учитывая, что $\alpha+\beta=\pi-\gamma-\delta$ и $\gamma+\beta=\pi-\alpha-\delta$, преобразуем полученные формулы площади:

$$S=2R^2\sin(\alpha+\beta)(\sin\delta\cdot\sin\gamma+\sin\alpha\cdot\sin\beta),$$

$$S=2R^2\sin(\gamma+\beta)(\sin\delta\cdot\sin\alpha+\sin\gamma\cdot\sin\beta).$$

Проведем следующие тригонометрические преобразования выражения из первого равенства:

$$2(\sin\delta\cdot\sin\gamma+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=\cos(\gamma-\delta)-\cos(\gamma+\delta)+\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=2\cos\frac{\gamma-\delta+\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta-\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{2\gamma+2\alpha-\pi}{2}\cdot\cos\frac{2\gamma+2\beta-\pi}{2}.$$

В результате имеем формулу площади четырехугольника в виде:

$$S=2R^2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\beta)=2R^2\sin B\cdot\sin C\cdot\sin\varphi\ .$$

Можно убедиться, что преобразования второго равенства приводят точно к такому же выражению. На самом деле таким сложным путем мы пришли к известному выражению, где задействованы два угла четырехугольника и угол между диагоналями φ. Сравнивая последнее равенство и формулу (2), получаем два *основных тригонометрических тождества в четырехугольнике*:

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\delta=4\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\alpha)\,;$$

$$\sin(\alpha+\beta)(\sin\delta\cdot\sin\gamma+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=\sin(\gamma+\beta)(\sin\delta\cdot\sin\alpha+\sin\gamma\cdot\sin\beta)\,.$$

В отличие от формул для треугольника, где аргументами тригонометрических функций являются углы треугольника, здесь аргументы — углы, под которыми из вершин видны стороны четырехугольника. Главное, что формулы для вычисления площади справедливы только для четырехугольника, вписанного в окружность, а вот полученные тождества справедливы для произвольных углов, соответствующих условию (1).

Другие тригонометрические тождества выводим из полученных, воспользовавшись преобразованиями и вводя замену углов. Например, $\alpha\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}$, $\beta\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}$, $\gamma\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}$, $\delta\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{D}{2}$, либо $\alpha\Rightarrow\frac{A}{2}$, $\beta\Rightarrow\frac{B}{2}$, $\gamma\Rightarrow\frac{C}{2}$, $\delta\Rightarrow\frac{D}{2}$. В этих случаях в полученных тождествах уже можно подразумевать углы при вершинах произвольного четырехугольника с очевидным условием $A+B+C+D=2\pi$. Например,

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D=4\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{C+A}{2}\,.$$

Конечно, каждую из этих тригонометрических формул несложно доказать, пользуясь тригонометрическими преобразованиями. Однако здесь, как и в случае с треугольниками, показано, что за тригонометрией следует видеть завуалированное планиметрическое содержание.

§ 4. Тригонометрические неравенства в треугольнике

В тригонометрии есть раздел, который в настоящее время мало востребован. Между тем когда-то часть этого раздела была в олимпиадных заданиях под названием геометрические неравенства. *Первое классическое неравенство* получаем из теоремы косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) - \frac{a^2}{2bc} \ge 1 - \frac{a^2}{2bc},\ 1-\cos\alpha \le \frac{a^2}{2bc}.$$

Запишем неравенства для синусов половинного угла $\begin{cases} \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \le \dfrac{a^2}{4bc} \\ \sin^2\dfrac{\beta}{2} \le \dfrac{b^2}{4ac} \\ \sin^2\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{c^2}{4ba} \end{cases}$,

перемножив которые, получаем

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}.$$

С одной стороны, проведя тригонометрические преобразования в этом неравенстве, можно получить следующие неравенства. Однако гораздо поучительнее и полезнее получить другие неравенства из геометрии. В качестве иллюстрации рассмотрим некоторые задачи и теоремы.

Задача 1. Докажите, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей (теорема Карно).

Так как четырехугольники *AMOK*, *CKON*, *BMON* (рис. 25) можно вписать в окружности (сумма противоположных углов равна 180^0), то, используя теорему Птолемея, имеем следующие равенства:

$$x\cdot\frac{b}{2}+y\cdot\frac{a}{2} = NK\cdot R = \frac{c}{2}\cdot R, \qquad x\cdot\frac{c}{2}+z\cdot\frac{a}{2} = NM\cdot R = \frac{b}{2}\cdot R,$$

$$z\cdot\frac{b}{2}+y\cdot\frac{c}{2} = MK\cdot R = \frac{a}{2}\cdot R.$$

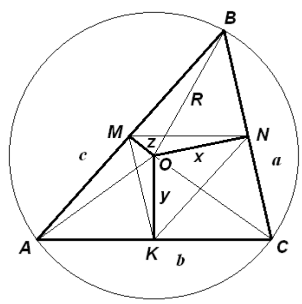

Рис. 25

Складывая три выражения, получаем: $x\cdot\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)+y\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)+z\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) = p\cdot R$. Если добавить справа и слева площадь треугольника $x\cdot\frac{a}{2}+y\cdot\frac{b}{2}+z\cdot\frac{c}{2} = p\cdot r$, то после сокращения на множитель *p* окончательно получаем $x+y+z=R+r$.

С другой стороны, так как $\alpha = \angle A = \angle NOC$, $\beta = \angle B = \angle KOC$, $\gamma = \angle C = \angle MOB$, то $x + y + z = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$. Таким образом, $r = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1)$. Из формулы Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей $\rho^2 = R^2 - 2Rr \geq 0$ (гл. IV, § 5) следует, что $r = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1) \leq \frac{R}{2}$, или $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$.

Следующий набор неравенств получаетм уже из тригонометрических преобразований, воспользовавшись формулами половинного угла:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}, \text{ или } \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}.$$

Так как $2R\cdot(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = P$, то получаем выражение $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{P}{2R} \leq \frac{a+b+c}{4r}$. Учитывая, что стороны можно выразить через радиус вписанной окружности по формулам: $a = r\cdot\left(ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\gamma}{2}\right)$, $b = r\cdot\left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\gamma}{2}\right)$, $c = r\cdot\left(ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\alpha}{2}\right)$, получаем еще одно *неравенство* вида:

$$2\cdot(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leq ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\gamma}{2}.$$

Задача 2. Вершины Δ *MKN* являются основаниями высот Δ *ABC*. Найдите площадь ортотреугольника *MKN*, если известны площадь и углы Δ *ABC*.

Свойств у ортотреугольника много, но нас интересует подобие.

Так как Δ ABC ~ Δ MBN (рис. 26) с коэффициентом подобия $\frac{MB}{BC} = \cos\beta$ (гл. 5), то $\frac{S_{MBN}}{S} = \cos^2\beta$. Аналогичные выводы следуют для треугольников *CKN* и *MKA*. В результате получаем площадь ортотреугольника: $S_{MNK} = S\cdot(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)$.

Таким образом, имеем следующий диапазон для отношения площадей $\frac{S_{MNK}}{S}$:

$$0 \leq 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma \leq \frac{1}{4}$$

или

$$\frac{3}{4} \leq \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \leq 1.$$

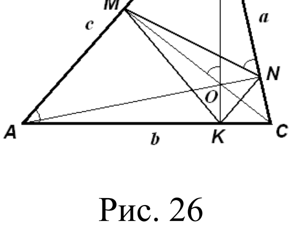

Рис. 26

Равенства достигаются, с одной стороны, в случае равностороннего треугольника: с другой — в случае прямоугольного треугольника, когда ортотреугольник вырождается в отрезок.

После сложных преобразований полученного неравенства:

$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = \sin^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2(\alpha+\beta) =$
$= \sin^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta =$
$= \sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\beta) - \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta =$
$= -2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta(-\cos(\alpha+\beta)) =$
$= 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$

следует *неравенство* $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \le \frac{1}{8}$.

§ 5. Теоремы о пересечении чевиан и прямой Эйлера

Прежде чем перейти к рассмотрению названных теорем, обратимся к самой теореме Чевы (Джованни Чева, итальянский математик, 1648 — 1734).

Теорема Чевы

Если на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC (рис. 27.) ***взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1, то отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда*** $AB_1\cdot CA_1\cdot BC_1 = B_1C\cdot A_1B\cdot C_1A$

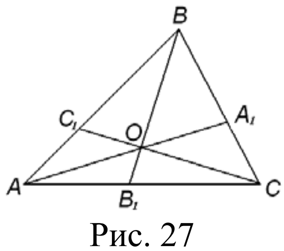

Рис. 27

В основе доказательства прямой теоремы лежат следующие соображения. Пусть отрезки пересекаются в точке O, тогда $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{S_{AOB_1}}{S_{B_1OC}} = \frac{S_{ABB_1}}{S_{B_1BC}} = \frac{S_{ABB_1} - S_{AOB_1}}{S_{B_1BC} - S_{B_1OC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$. При выводе был использован принцип равных отношений: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a+c}{b+d}$. Воспользовавшись этим результатом, докажем теорему о пересечении чевиан (отрезки, выходящие из вершин треугольника и пересекающиеся внутри треугольника в одной точке).

Теорема о пересечении чевиан

Чевианы в треугольнике ABC точкой пересечения O делятся в отношении $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C}$***, считая от вершины.***

С одной стороны, $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$ и $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$. Откуда следует, что $\frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BOC} + S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AOC}}{S_{AOC}}$. С другой стороны, получаем такой же результат из другого условия: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BB_1 - OB_1}{OB_1} = \frac{S_{ABC} - S_{AOC}}{S_{AOC}}$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Рассмотрим *частные случаи этой формулы*.

В случае медиан получаем классический результат: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = 1 + 1 = 2$ или $\frac{BO}{OB_1} = \frac{2}{1}$.

В случае пересечения биссектрис следует учесть, что $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{AC}$ и $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{CA}$. Таким образом, имеем: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC + BA}{CA}$.

При пересечении высот следует учесть, что каждый отрезок можно записать через высоты и углы треугольника: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CC_1 \cdot ctgB}{CC_1 \cdot ctgA} + \frac{AA_1 \cdot ctgB}{AA_1 \cdot ctgC}$. В результате окончательно получаем $\frac{BO}{OB_1} = \frac{tgA + tgC}{tgB}$.

Теорема Эйлера

В любом треугольнике центр описанной окружности O, ортоцентр P и точка пересечения медиан M лежат на одной прямой, причем точка M делит отрезок OP так, что $\frac{PM}{MO} = \frac{2}{1}$.

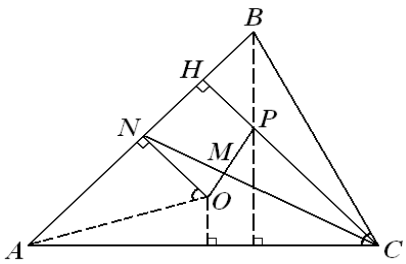

Рис. 28

Итак, в Δ ABC, CH — высота, NO — серединный перпендикуляр, точка O — центр описанной окружности, точка P — ортоцентр (рис. 28). Пусть точка M есть пересечение медианы NC и отрезка PO. Из подобия треугольников NOM и PMC следует пропорция $\frac{PC}{ON} = \frac{PM}{OM} = \frac{MC}{NM}$. Теорема будет доказана, если будет доказано, что $\frac{PC}{ON} = \frac{2}{1}$.

Итак, $\frac{PC}{CH - PC} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg\gamma}$, откуда следует $PC = CH \cdot \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} = CH \cdot \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma}$. Учитывая, что $\angle ACB = \angle AON$, имеем $ON = \frac{AB}{2tg\gamma}$, где

$AB = AH + HB = CH \cdot (ctg\alpha + ctg\beta)$. Таким образом, $ON = \frac{CH}{2} \cdot \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma}$, что и означает выполнение равенства $\frac{PC}{ON} = \frac{2}{1}$. Теорема доказана.

Задача. В треугольнике с заданными углами найти расстояние между центром описанной окружности радиуса R и ортоцентром.

Выразим вектор $\overrightarrow{OP}$ (рис. 29) через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Учитывая, что вектор $\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, имеем $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ т.е. получаем *формулу Гамильтона:*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot$$

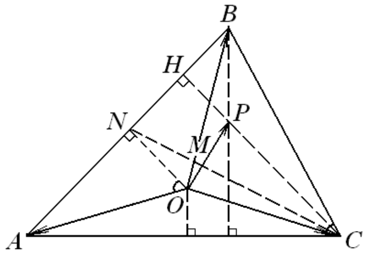

Рис. 29

Возведем в квадрат это выражение: $\left(\overrightarrow{OP}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = 3R^2 + 2 \cdot \left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}\right)$. Перейдя в скалярную запись, получаем:

$$OP^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma),$$

или

$$OP^2 = 9R^2 - 4R^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma),$$

или

$$OP^2 = 4R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3R^2.$$

Учитывая, что $OP^2 \geq 0$, получаем три неравенства в треугольнике:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2};$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \frac{9}{4};$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}.$$

Таким образом, большинство тригонометрических формул и неравенств в треугольнике следуют из планиметрии. В какой-то степени тригонометрия является своеобразным каркасом геометрии, так как достаточно помножить эти формулы на размерные единицы, и они становятся планиметрическими формулами при решении треугольников. Самый наглядный пример — основное тригонометрическое тождество, которое при умножении на квадрат гипотенузы преобразуется в теорему Пифагора.

§ 6. Рациональные треугольники

При решении планиметрических или стереометрических задач иногда пользуются формулой Герона. Как правило, в этом случае стороны треугольника соответствуют сторонам так называемого рационального треугольника. *Рациональным называют треугольник, у которого стороны, площадь и радиусы вписанной и описанной окружностей представляют собой рациональные числа.*

Приведем ряд формул, с помощью которых всегда можно воссоздать рациональный треугольник. Эти полезные соотношения удобно использовать при составлении задач.

Итак, даны $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, тогда $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}$.

Далее воспользуемся тем, что $\sin\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{a}{2R}$, $\sin\beta=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}}=\dfrac{b}{2R}$, $\sin\gamma=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{c}{2R}$. Учитывая, что $S=\dfrac{abc}{4R}$ и $S=pr$, при рациональных значениях $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$ и R получаем рациональные значения a, b, c и S. Например, пусть $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$, тогда $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\dfrac{1-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=\dfrac{11}{7}$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{16}}=\dfrac{8}{17}$, $\sin\beta=\dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}}=\dfrac{3}{5}$, $\sin\gamma=\dfrac{2\cdot\frac{11}{7}}{1+\frac{121}{49}}=\dfrac{77}{85}$.

Теперь пусть $R=85/2$, тогда будет a = 40, b = 51, c = 77, S = 924 и r = 11.

Таблица рациональных треугольников

a	3	4	4	6	7	7	8	9	9	10	11	11	12	14
b	25	13	53	29	15	65	29	10	73	17	13	25	17	13
c	26	15	51	25	20	68	35	17	80	21	20	30	25	15
S	36	24	90	60	42	210	84	36	216	84	66	132	90	84

§ 7. Применение теорем синусов и косинусов в треугольнике

Тематика наиболее трудных заданий по планиметрии связана с применением теорем синусов и косинусов. Причем большинство из этих заданий 50 — 60 лет назад имело олимпиадный уровень. Рассмотрим две характерные задачи.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = AC$, $\angle A = 80°$ (рис. 30). Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MCB = 10°$, $\angle MBC = 30°$. Найти $\angle AMC$.

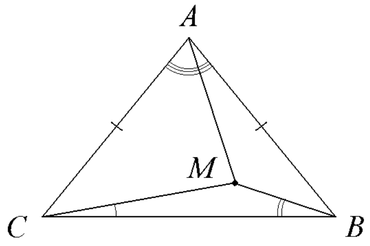

Рис. 30

Решение. Пусть $\angle MAB = x$, тогда $\angle AMC = 60°+$ $+ x$. Запишем теорему синусов для ΔACM и ΔABM:

$$\begin{cases} \dfrac{AM}{\sin 40°} = \dfrac{AC}{\sin(60° + x)}, \\ \dfrac{AM}{\sin 20°} = \dfrac{AB}{\sin(160° - x)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $\dfrac{\sin 20°}{\sin 40°} = \dfrac{\sin(160° - x)}{\sin(60° + x)}$; $\dfrac{1}{2\cos 20°} = \dfrac{\sin(20° + x)}{\cos(30° - x)}$;

$$\cos(30° - x) = 2\cos 20° \sin(20° + x) = \sin x + \sin(40° + x);$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sin x + \sin(40° + x); \ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \sin(40° + x);$$

$$\sin(60° - x) = \sin(40° + x) \Rightarrow 60° - x = 40° + x \Rightarrow \boxed{x = 10°}.$$

Тогда $\angle AMC = 70°$, откуда, кстати, $AC = CM$.

Задача 2. Сумма двух сторон треугольника 613, 47 арш., третья сторона 263,546 арш. Угол, противолежащий меньшей стороне, равен $47^0 56' 13''$. Определите прочие части треугольника и его площадь (выпускной и одновременно вступительный экзамен в университет (!) в гимназиях в 1874 г.).

Упростим задачу, скорректировав численные данные: сумма двух сторон $m = 60$, косинус заданного угла $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, третья сторона $a = 28$. Пусть b меньшая сторона треугольника.

Тогда имеем следующую систему уравнений: $\begin{cases} b + c = m, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha \end{cases}$.

Подставляя из первого уравнения сторону b во второе уравнение, получаем решение системы $\begin{cases} c = \dfrac{m^2 - a^2}{2(m - a\cos\alpha)}, \\ b = \dfrac{m^2 + a^2 - 2am\cos\alpha}{2(m - a\cos\alpha)} \end{cases}$. Учитывая, что $\begin{cases} b < a, \\ b < c \end{cases}$ после решения квадратного неравенства относительно a, получаем условия, которым должна соответствовать сторона a: $\frac{m}{1+2\cos\alpha} < a < m\cdot\cos\alpha$. Отметим, что по условиям исходной задачи, получаем $\frac{m}{1+2\cos\alpha} \approx 262{,}178 < a = 263{,}546$. Это означает, что ошибка в арифметических вычислениях в полпроцента приводит к неправильному результату, т. е. сторона a является наименьшей.

По новым данным получаем следующий результат: $\begin{cases} b = 27\frac{11}{27}, \\ c = 32\frac{16}{27} \end{cases}$, $S = 365\frac{1}{27}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В равнобедренном треугольнике дано отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной R/r. Найти углы треугольника.

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2\,{}^{r}\!/\!_{R}}}{2}$, $180^0 - 2\alpha$.

2. В треугольнике *ABC* сторона *AB* является диаметром окружности, которая пересекает *AC* и *CB* в точках *M* и *N*. Точка *M* делит дугу *AMB* пополам. Дуга *MN* является шестой частью окружности. Найти *MN*, если площадь треугольника *ABC* равна $1+\sqrt{3}/3$.

Ответ: *MN* = 1.

3. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании треугольника образует со стороной, к которой проведена, угол α и равна *l*. Найдите стороны треугольника.

Ответ: $\ell\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{2}{3}\alpha}$; $\ell\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{4}{3}\alpha}$ либо $\ell\frac{\sin\alpha}{\sin\left(120^0-\frac{2}{3}\alpha\right)}$; $\ell\frac{\sin\alpha}{\sin\left(240^0-\frac{4}{3}\alpha\right)}$

4. Равнобедренный треугольник с углом при основании равном β пересечен прямой, проходящей через середину основания и составляющей с ним угол α. Найдите отношение площади отсеченного треугольника к площади исходного.

Ответ: $\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$

5. Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая боковую сторону и составляющая с основанием угол β. В каком отношении прямая делит площадь треугольника?

Ответ: $\frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

6. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании треугольника равна основанию треугольника. Найдите углы треугольника.
Ответ: 72^0, 72^0, 36^0.

Глава V. ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР — ВЕЛИЧАЙШИЙ МАТЕМАТИК ВСЕХ ВРЕМЕН И НАРОДОВ

Леонард Эйлер (1707 — 1783) родился в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. Первые уроки Леонард получил от отца, а учась в последних классах гимназии, он посещал лекции по математике в Базельском университете, которые читал Иоганн Бернулли. Вскоре Эйлер самостоятельно изучает первоисточники, а по субботам Бернулли беседует с талантливым студентом. Леонард дружит с его сыновьями, особенно с Даниилом. В 1723 году Эйлер получил степень магистра искусств. В 1727 году он предпринял попытку занять кафедру физики в родном университете, но ему это не удалось. Он принял решение ехать в Петербург, куда его звали работавшие там Даниил и Николай Бернулли.

В Петербурге Эйлер сложился как великий ученый. К 35 годам из-за постоянных перегрузок Эйлер подорвал здоровье. Он перенапряг зрение и ослеп на один глаз. В 1740 году из-за проблем со здоровьем и по причине политической неустойчивости в России он едет в Берлин, куда его приглашает король Фридрих II. Со временем ситуация в России изменилась: на трон взошла Екатерина II, которой очень хотелось вернуть великого ученого. В 1766 году Эйлер возвращается в Россию. Вскоре после приезда ученый полностью лишается зрения. Несмотря на потерю зрения, работоспособность Эйлера не снизилась. Во второй петербургский период им написана половина всех его работ.

Умер Эйлер в 1783 году, оставив огромное научное наследие по математике, физике, астрономии, которое до сих пор издается в Швейцарии. Похоронен ученый в Александро-Невской лавре. Его могила находится недалеко от могилы М. В. Ломоносова.

Ниже приведены две формулы, носящие имя Эйлера.

§ 1. Расстояние между центрами вписанной и описанной окружности в треугольнике

Пусть в ΔABC точка O — центр вписанной окружности, точка P — центр описанной окружности, $\angle CBA$ равен β, а $\angle BAC$ равен α, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности (рис. 31).

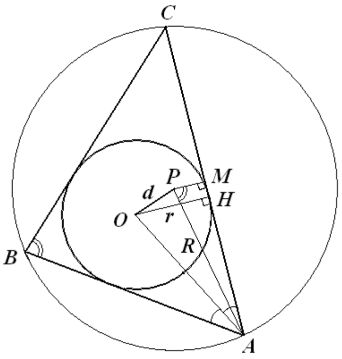

Рис. 31

Из треугольников AOH, APM имеем следующие равенства: $AO = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $\angle PAM = 90^0 - \beta$ и

$$\angle PAO = \frac{\alpha}{2} - (90^0 - \beta) = \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^0 .$$

Запишем теорему косинусов для ΔAOP:

$$d^2 = R^2 + \frac{r^2}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} - 2Rr\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Так как $AC = r\cdot\left(ctg\dfrac{\alpha}{2} + ctg\dfrac{\gamma}{2}\right) = 2R\sin\beta$, где $\angle BCA = \gamma$, то

$$d^2 = R^2 - 2Rr\cdot\left(\frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\beta}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\left(ctg\dfrac{\alpha}{2}+ctg\dfrac{\gamma}{2}\right)}\right).$$

Рассмотрим выражение в скобках:

$$\frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\beta}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\left(ctg\dfrac{\alpha}{2}+ctg\dfrac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\beta\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{2\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(90^0-\dfrac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(90^0+\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{2\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right) - 2\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = 1.$$

Таким образом, получили *формулу Эйлера*:

$$d^2 = R^2 - 2Rr .$$

Следствием из формулы является то, что в любом треугольнике радиус описанной окружности не меньше удвоенного радиуса вписанной окружности, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний.

§ 2. Расстояние между центрами вневписанной и описанной окружности в треугольнике

Пусть в ΔABC точка O — центр вневписанной окружности, точка P — центр описанной окружности, $\angle CBA$ равен β, а $\angle BAC$ = α, R — радиус описанной окружности, ρ — радиус вневписанной окружности (рис. 32).

Из треугольников AOK, APM имеем следующие равенства: $AO = \dfrac{\rho}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $\angle PAM = \beta - 90^0$

и $\angle PAO = \dfrac{\alpha}{2} + (\beta - 90^0) = \dfrac{\alpha}{2} + \beta - 90^0$.

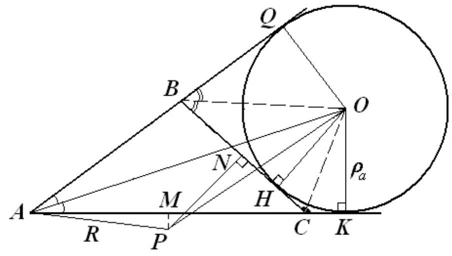

Рис. 32

Запишем теорему косинусов для ΔAOP:

$$d^2 = R^2 + \frac{\rho^2}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} - 2R\rho \cdot \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Так как $BC = \rho \cdot \left(ctg\dfrac{180^0 - \beta}{2} + ctg\dfrac{180^0 - \gamma}{2} \right) = 2R\sin\alpha$, где $\angle BCA = \gamma$, то

$$\rho = \frac{2R\sin\alpha}{tg\dfrac{\beta}{2} + tg\dfrac{\gamma}{2}} \text{ и } d^2 = R^2 + 2R\rho \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \left(tg\dfrac{\beta}{2} + tg\dfrac{\gamma}{2} \right)} - \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \right).$$

Рассмотрим выражение в скобках:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \left(tg\dfrac{\beta}{2} + tg\dfrac{\gamma}{2} \right)} - \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\dfrac{\beta + \gamma}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{2 \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} - \sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} - \sin\left(90^0 + \dfrac{\beta - \gamma}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} - \cos\left(\dfrac{\beta - \gamma}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\left(\dfrac{\beta + \gamma}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = 1.$$

Таким образом, получили *очередную формулу Эйлера*: $d^2 = R^2 + 2R\rho$.

Упражнения к главам

I. Задания на определение тригонометрических функций и формулы двойного аргумента

1. Найдите $cos2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$.

2. Найдите $cos2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$.

3. Найдите $\sin x$ и $\cos 2x$, если $\cos x = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

4. Найдите $\cos x$, $\sin 2x$, если $\sin x = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

5. Найдите $tg\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

6. Найдите $tg\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

7. Найдите $ctg\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

8. Найдите $tg\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

9. Найдите $\sin\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha,$ если $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ и $0 < \alpha < 90^0$.

10. Найдите $\sin\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha,$ если $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ и $90^0 < \alpha < 180^0$.

11. Найдите $\cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha,$ если $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$ и $270^0 < \alpha < 360^0$.

12. Найдите $\cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha,$ если $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и $90^0 < \alpha < 180^0$.

13. Найдите $\sin\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha,$ если $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ и $270^0 < \alpha < 360^0$.

14. Найдите $\sin\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha,$ если $\cos\alpha = \frac{21}{29}$ и $0 < \alpha < 90^0$.

15. Найдите $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ ctg\alpha,$ если $tg\alpha = -\frac{7}{24}$ и $270^0 < \alpha < 360^0$.

16. Найдите $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ ctg\alpha,$ если $tg\alpha = \frac{35}{12}$ и $0 < \alpha < 90^0$.

17. Найдите $\sin 2x,\ \cos 2x,\ tg2x,$ если $tgx = -\frac{21}{20}$.

18. Найдите $\sin 2x,\ \cos 2x,\ tg2x,$ если $ctgx = -\frac{7}{24}$.

19. Найдите $\sin 2x,\ \cos 2x,\ tg2x,$ если $ctgx = \sqrt{2} - 1$.

20. Найдите $\sin 2x,\ \cos 2x,\ tg2x,$ если $ctgx = 2 - \sqrt{3}$.

21. Найдите $\sin 2x,\ \cos 2x,\ tg2x,$ если $tgx = 1 - \sqrt{2}$.

22. Найдите $\sin 2x,\ \cos 2x,\ tg 2x,$ если $tgx = \sqrt{3} - 2$.

23. Дано: $2\sin\varphi - 2\cos\varphi = 1.$ Найдите $\sin 2\varphi.$

24. Дано: $3\sin\varphi + 3\cos\varphi = 1.$ Найдите $\sin 2\varphi.$

25. Дано: $tg\varphi + ctg\varphi = -8.$ Найдите $\sin 2\varphi.$

26. Дано: $tg\varphi + ctg\varphi = 9.$ Найдите $\sin 2\varphi.$

27. Пусть $2\cos 2\alpha + 7\sin\alpha = 0.$ Найдите $\sin\alpha$ и $\cos 2\alpha.$

28. Пусть $13\cos\alpha - 2\cos 2\alpha = 5.$ Найдите $\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha.$

29. Вычислите $2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}.$

30. Вычислите $\cos^2\dfrac{\pi}{12} - \sin^2\dfrac{\pi}{12}.$

31. Катет прямоугольного треугольника $AC = 9$, а гипотенуза $AB = 9\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла A.

32. Катет прямоугольного треугольника $AC = 5$, а гипотенуза $AB = \sqrt{89}$. Найдите тангенс угла A.

33. Катет прямоугольного треугольника $AC = 10$, а гипотенуза $AB = \sqrt{181}$. Найдите тангенс угла A.

34. Катет прямоугольного треугольника $AC = 4$, а гипотенуза $AB = 2\sqrt{13}$. Найдите тангенс угла A.

II. Задания на формулы сложения и приведения

1. Докажите, что числа $\sin 5^0$; $0{,}5\cos 25^0$ и $\sin 55^0$ составляют арифметическую прогрессию.

2. Докажите, что числа $\cos 20^0$ — 0,5; $\sin 40^0$ и $\cos 20^0$ составляют геометрическую прогрессию.

3. Вычислите $\dfrac{tg35^0 + tg10^0}{1 - tg35^0 \cdot tg10^0}.$

4. Вычислите $\dfrac{tg11^0 + tg19^0}{1 - tg11^0 \cdot tg19^0}.$

5. Вычислите $\dfrac{tg79^0 - tg19^0}{1 + tg79^0 \cdot tg19^0}.$

6. Вычислите $\dfrac{44\sin 12^0 \cdot \cos 12^0}{\sin 24^0}.$

7. Вычислите $\dfrac{14\sin 20^0 \cdot \cos 20^0}{\sin 40^0}.$

8. Вычислите $\frac{4\sin 87^0 \cdot \cos 87^0}{\sin 174^0}$.

9. Вычислите $\frac{10\sin 40^0 \cdot \cos 40^0}{\sin 80^0}$.

10. Вычислите $\cos 47^0 \cdot \cos 2^0 + \sin 47^0 \cdot \sin 2^0$.

11. Вычислите $\sin 31^0 \cdot \cos 29^0 + \sin 29^0 \cdot \cos 31^0$.

12. Найдите значение выражения $\frac{5\sin 98^0}{\sin 49^0 \cdot \sin 41^0}$.

13. Найдите значение выражения $\frac{5\sin 74^0}{\cos 37^0 \cdot \cos 53^0}$.

14. Найдите значение выражения $\frac{3\sin 88^0}{\cos 44^0 \cdot \cos 46^0}$.

15. Найдите значение выражения $\frac{\sin 66^0}{\sin 33^0 \cdot \sin 57^0}$.

16. Найдите значение выражения $\frac{2\cos 13^0 \cdot \cos 43^0 - \cos 56^0}{2\sin 58^0 \cdot \cos 13^0 - \sin 71^0}$.

17. Найдите значение выражения $\frac{2\cos 10^0 \cdot \cos 70^0 - \cos 80^0}{2\sin 40^0 \cdot \cos 10^0 - \sin 50^0}$.

18. Найдите значение выражения $\frac{2\cos 11^0 \cdot \cos 56^0 - \cos 67^0}{2\sin 48^0 \cdot \cos 3^0 - \sin 51^0}$.

19. Найдите значение выражения $\frac{2\cos 12^0 \cdot \cos 42^0 - \cos 54^0}{2\sin 55^0 \cdot \cos 25^0 - \sin 80^0}$.

20. Найдите значение выражения $\frac{\sin^2 11^0 + \sin^2 79^0}{\cos^2 53^0 + \cos^2 37^0}$.

21. Найдите значение выражения $\frac{\sin^2 8^0 + \sin^2 82^0}{\cos^2 51^0 + \cos^2 39^0}$.

22. Сравните числа: $\frac{\sin 12^0 + \sin 10^0}{\sin 12^0 - \sin 10^0}$ и $\frac{tg 7^0}{tg 1^0}$.

23. Сравните числа: $\frac{\sin 32^0 + \sin 22^0}{\sin 32^0 - \sin 22^0}$ и $\frac{tg 28^0}{tg 5^0}$.

24. Сравните числа: $\frac{\cos 17^0 - \cos 29^0}{\cos 17^0 + \cos 29^0}$ и $tg 23^0 \sin 6^0$.

25. Сравните числа: $\frac{\cos 6^0 - \cos 8^0}{\cos 6^0 + \cos 8^0}$ и $tg 7^0 \sin 1^0$.

26. Вычислите: $\dfrac{\sin 75^0+\sin 45^0}{\sin 285^0}$.

27. Вычислите: $\dfrac{\sin 70^0+\sin 20^0}{\cos 155^0}$.

28. Вычислите: $\dfrac{\sin 75^0-\sin 45^0}{\cos 285^0}$.

29. Вычислите: $\dfrac{\cos 55^0+\cos 35^0}{\sin 260^0}$.

30. Вычислите: $\dfrac{\cos 25^0\sin 25^0+\cos 95^0\sin 95^0}{\sqrt{\dfrac{1-\cos 400^0}{2}}}+\cos 210^0$.

31. Вычислите: $\dfrac{\cos 5^0\sin 5^0-\cos 125^0\sin 125^0}{\sqrt{\dfrac{1+\cos 260^0}{2}}}+\sin 240^0$.

32. Вычислите: $\dfrac{\cos 20^0+\sin 50^0-\cos 80^0}{\sqrt{1+\cos 280^0}}+2\cos 135^0$.

33. Вычислите: $\dfrac{\cos 20^0+\cos 100^0+\cos 40^0}{\sqrt{1+\cos 280^0}}-2\sin 135^0$.

34. Вычислить: $\cos^4\dfrac{3\pi}{16}+\sin^4\dfrac{29\pi}{16}$.

35. Вычислить: $\cos^4\dfrac{7\pi}{24}+\sin^4\dfrac{17\pi}{24}$.

36. Вычислить: $\sin^8 2\alpha-\cos^8 2\alpha$ при $\alpha=\dfrac{11\pi}{24}$.

37. Вычислить: $\sin^6 2\alpha-\cos^6 2\alpha$ при $\alpha=\dfrac{5\pi}{16}$.

III. Задания на тригонометрические преобразования

Упростить выражения

1. $\dfrac{tg\alpha+ctg\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

2. $\dfrac{tg\alpha-ctg\beta}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

3. $\left(tg^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cdot\dfrac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

4. $\dfrac{\sin\alpha + tg\alpha}{1+\cos\alpha}$.

5. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + ctg^2\alpha$.

6. $1 + ctg^2\alpha + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

7. $\cos(\pi+2x) + \sin(\pi+2x)\cdot tg\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$;

8. $\sin(\pi+2x)\cdot ctg\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) - \cos(\pi+2x)$.

9. $\dfrac{(\cos x+\sin x)^2-1}{tgx - \sin x\cdot\cos x}$.

10. $\dfrac{\sin x}{1+\mathrm{ctgx}} + \dfrac{\cos x}{1+tgx} - \dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

11. $\dfrac{\sqrt{2}\cos x - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right) - \sqrt{3}\cos x}$.

12. $\dfrac{\sqrt{2}\cos x - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) - \sqrt{3}\cos x}$.

13. $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha}$.

14. $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)}$.

15. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi - 6x\right) + \sin(\pi+4x) + \sin(3\pi - x)}{\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi + 6x\right) + \cos(4x-2\pi) + \cos(x+2\pi)}$.

16. $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi + x\right)\cdot \mathrm{tg}(\pi+2\mathrm{x})}{\mathrm{tg2x} - \mathrm{tgx}} + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$.

17. $\dfrac{1+\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi + x\right)\cdot \mathrm{ctg}\left(2x - \dfrac{3\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg2x} + \mathrm{tgx}}$.

18. $\dfrac{\sin\left(2\pi + \dfrac{x}{4}\right)\cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\mathrm{x}}{8} - \cos\left(2\pi + \dfrac{x}{4}\right)}{cos\left(\dfrac{x}{4} - 3\pi\right)\cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\mathrm{x}}{8} + \cos\left(\dfrac{7}{2}\pi - \dfrac{x}{4}\right)}$.

Ответы к упражнения

I. Задания на определение тригонометрических функций и формулы двойного аргумента

1. $\frac{119}{169}$; **2.** $\frac{119}{169}$; **3.** $\frac{4}{5}$, $-\frac{7}{25}$; **4.** $-\frac{3}{5}$, $-\frac{24}{25}$; **5.** 5; **6.** $-\frac{3}{2}$; **7.** $-\frac{3}{2}$; **8.** –5; **9.** $\frac{8}{17}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{15}{8}$; **10.** $\frac{5}{13}$, $-\frac{5}{12}$, $-\frac{12}{5}$; **11.** $\frac{8}{17}$, $-\frac{15}{8}$, $-\frac{8}{15}$; **12.** $-\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{5}{12}$; **13.** $-\frac{24}{25}$, $-\frac{24}{7}$, $-\frac{7}{24}$; **14.** $\frac{20}{29}$, $\frac{20}{21}$, $\frac{21}{20}$; **15.** $-\frac{7}{25}$, $\frac{24}{25}$, $-\frac{24}{7}$; **16.** $\frac{35}{37}$, $\frac{12}{37}$, $\frac{12}{35}$; **17.** $-\frac{84}{841}$, $-\frac{41}{841}$, $\frac{84}{41}$; **18.** $-\frac{336}{625}$, $-\frac{527}{625}$, $\frac{336}{527}$; **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,–1; **20.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; **21.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, –1; **22.** $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; **23.** $\frac{3}{4}$; **24.** $-\frac{8}{9}$; **25.** $-\frac{1}{4}$ **26.** $\frac{2}{9}$; **27.** $-\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$; **28.** $\frac{1}{4}$, $-\frac{7}{8}$; **29.** 1; **30.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **31.** 1; **32.** $\frac{8}{5}$; **33.** $\frac{9}{10}$; **34.** $\frac{3}{2}$.

II. Задания на формулы сложения и приведения

3. 1; **4.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; **5.** $\sqrt{3}$; **6.** 22; **7.** 7; **8.** 2; **9.** 5; **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **12.** 10; **13.** 10; **14.** 6; **15.** 2; **16.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$; **17.** 1; **18.** 1; **19.** $\sqrt{3}$; **20.** 1; **21.** 1; **26.** $-\sqrt{3}$; **27.** $-\sqrt{2}$; **28.** 1; **29.** $-\sqrt{2}$; **30.** 0; **31.** 0; **32.** 0; **33.** 0; **34.** $\frac{6-\sqrt{2}}{8}$; **35.** $\frac{6-\sqrt{3}}{8}$; **36.** $\frac{-7\sqrt{3}}{16}$; **37.** $\frac{7\sqrt{2}}{16}$.

III. Задания на тригонометрические преобразования

1. $tg\alpha$; **2.** –1; **3.** 1; **4.** $tg\alpha$; **5.** $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; **6.** $\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$; **7.** 1; **8.** 1; **9.** $2ctg^2x$; **10.** 0; **11.** $\sqrt{2}$; **12.** $\sqrt{2}$; **13.** $tg\alpha$; **14.** $-\frac{tg\alpha}{\sqrt{3}}$; **15.** tgx; **16.** $\cos 2x-\sin 2x$; **17.** $tg2x$; **18.** $-tg\frac{x}{8}$.

Заключение

Представленный факультативный курс с названием «Введение в тригонометрию» показал то, что огромный пласт тригонометрического материала лежит за рамками формул и преобразований, которые необходимы для применения в конкретных задачах. Основной набор подобных заданий приведен в учебниках старшей школы. Во всех учебниках алгебры и математического анализа для старших классов почти 40 % годовой учебной нагрузки посвящено тригонометрии. Даже такой раздел школьной математики, как математический анализ занимает меньше 30 % годовой учебной нагрузки. Таким образом, если добавить еще тригонометрическую часть из планиметрии основной школы, то тригонометрия становится вполне самостоятельной частью школьной математики, как она и была многие десятилетия.

Когда-нибудь школьная математика, пройдя нелегкий путь от реформы 70-х годов XX века, разрушившей ее стройность и фундаментальность, до реформы нашего времени, ориентированной в основном на современные лозунги ФГОС и «Концепцию развития математического образования в Российской Федерации» [10, 11], все-таки вернется к структуре и содержанию 50 — 60-х годов XX века, время, когда физико-математическое образование в стране было лучшим в мире.

Литература

1. *Малышев, И. Г.* ЕГЭ как важнейший элемент мотивации выпускников в повышении уровня геометрических знаний / И. Г. Малышев // Нижегородское образование. — 2008. — № 1. — С. 39—42.

2. *Малышев, И. Г.* Тригонометрия как наиболее проблемный раздел школьной математики / И. Г. Малышев // Нижегородское образование. — 2013. — № 3. — С. 63—67.

3. *Малышев, И. Г.* О важности тригонометрии как раздела геометрии / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2010. — № 8. — С. 52—54.

4. *Малышев, И. Г.* Тригонометрические неравенства в треугольнике / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2012. — № 2. — С. 52—55.

5. *Малышев, И. Г.* Треугольник в треугольнике и теорема Карно / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2014. — № 7. — С. 43—48.

6. *Малышев, И. Г.* Тригонометрические формулы в треугольнике и их обобщение / И. Г. Малышев // Фрактал. Математика в профильной школе. — 2013. — № 1. — С. 28—33.

7. *Новоселов, С. И.* Тригонометрия: учебник для 9—10 классов средней школы / С. И. Новоселов. — М. : Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1964. — 96 с.

8. *Макарычев, Ю. Н.* Тригонометрия. 10 класс: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]. — М. : Просвещение, 2012. — 61 с.

9. Программа курса к учебникам «Математика» 5—9 классы / под ред. акад. РАН В. В Козлова и акад. РАО А. А. Никитина; авт.-сост. В. В Козлов [и др.]. — М. : ООО «Русское слово — учебник», 2012. — 32 с. — (ФГОС. Инновационная школа).

10. *Малышев, И. Г.* Между Сциллой и Харибдой / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2014. —№ 5. —С. 3—6.

11. *Малышев, И. Г.* Суета как суть реформ / И. Г. Малышев // Математика в школе. —2015. —№ 2. —С. 3—7.

Приложения к главам

Приложение к главам I и II

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$, $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$tg\beta - tg\alpha = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, $tg\beta + tg\alpha = \dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cdot\cos\alpha - \cos\beta\cdot\sin\alpha$

$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cdot\cos\alpha + \cos\beta\cdot\sin\alpha$ $\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\sin\alpha$

$\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\cdot\sin\alpha$

$tg(\beta+\alpha) = \dfrac{tg\beta + tg\alpha}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$, $tg(\beta-\alpha) = \dfrac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$

$\cos 3\alpha = \cos\alpha\cdot(4\cos^2\alpha - 3)$, $\sin 3\alpha = \sin\alpha\cdot(3 - 4\sin^2\alpha)$

$2\sin\beta\cdot\cos\alpha = \sin(\beta+\alpha) + \sin(\beta-\alpha)$

$2\cos\beta\cdot\cos\alpha = \cos(\beta+\alpha) + \cos(\beta-\alpha)$ $2\sin\beta\cdot\sin\alpha = \cos(\beta-\alpha) - \cos(\beta+\alpha)$

$\sin\beta - \sin\alpha = 2\cdot\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}$ $\sin\beta + \sin\alpha = 2\cdot\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

$\cos\beta + \cos\alpha = 2\cdot\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = 2\cdot\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

Приложение к главе IV
Тригонометрические формулы для треугольника

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} + \dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} = 2$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma + \cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta + \cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\sin\alpha = \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$,

$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma$

$$ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}=ctg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\beta}{2}\cdot ctg\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}=2\cdot ctg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\beta}{2}\cdot ctg\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$$

$$2\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\le ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\le\frac{1}{8}$$

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\ge-\frac{3}{2}$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge\frac{3}{4}$$

Тригонометрические формулы для четырехугольника

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D=4\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{C+A}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=4\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{C+A}{2}$$

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\sin\frac{D}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{C+B}{2}\right)\left(\sin\frac{D}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\cos\frac{D}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{C+B}{2}\right)\left(\cos\frac{D}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{C+B}{2}\right)\sin\left(\frac{C+A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{D}{2}$$

$$\sin\left(\frac{C+B}{2}\right)\sin\left(\frac{C+A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{D}{2}$$

И. Г. Малышев

ВВЕДЕНИЕ В ТРИГОНОМЕТРИЮ

Предпрофильная подготовка
учащихся 8—9 классов по математике

Учебно-методическое пособие

Редактор *Н. А. Елизарова*

Компьютерная верстка *О. В. Кондрашина*

Оригинал-макет подписан в печать 09.06.2015 г.
Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times NewRoman.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 5,58. Тираж 100 экз. Заказ 2250.

Нижегородский институт развития образования,
603122, Н. Новгород, ул. Ванеева, 203.
www.niro.nnov.ru

Отпечатано в издательском центре учебной
и учебно-методической литературы ГБОУ ДПО НИРО