Государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«Нижегородский институт развития образования»

Избранные разделы математики

Элективный курс для 10 — 11 классов

Методическое пособие

Нижний Новгород
Нижегородский институт развития образования
2016

УДК 373.167.1:51*10/11
ББК 22.1.я 721
И 32

Авторы-составители:

И. Г. Малышев, канд. техн. наук,
доцент, зав. кафедрой теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО;
М. А. Мичасова, канд. пед. наук,
доцент кафедры теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО;
М. В. Котельникова, ст. преподаватель
кафедры теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО

Рецензенты:

Ю. А. Кузнецов, докт. физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математического моделирования экономических процессов ИЭП ННГУ им. Н. И. Лобачевского;
О. В. Королева, учитель высшей категории МБОУ СОШ № 174 Н. Новгорода

Рекомендовано к изданию
научно-методическим экспертным советом ГБОУ ДПО НИРО

И 32 **Избранные** разделы математики: элективный курс для 10—11 классов : методическое пособие / авт.-сост. И. Г. Малышев, М. А. Мичасова, М. В. Котельникова. — Н. Новгород : Нижегородский институт развития образования, 2016. — 135 с.

ISBN 978-5-7565-0675-4

Основу методического пособия составили теоретические и практические материалы, оставшиеся за рамками школьного курса по элементарной математике. Данный курс направлен на углубление и расширение предметных знаний, имеет прикладное и общеобразовательное значение, развивает логическое мышление учащихся. Нестандартный подход к изучению элементарной математики, предложенный авторами, будет интересен как учителям-предметникам, так и учащимся 10—11 классов.

УДК 373.167.1:51*10/11
ББК 22.1.я 721

ISBN 978-5-7565-0675-4

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Элективный курс «Избранные разделы математики для старшей школы» является переработанным и дополненным курсом 2010 г. (экспертное заключение № 203 от 19.10.2010 г.) и выполняет функцию поддержки основных курсов цикла математического образования в старшей школе. Он ориентирован на углубление и расширение предметных знаний по математике и соответствующих компетентностей.

Программа элективного курса состоит из четырех завершенных образовательных разделов, продолжительность каждого — 34 часа:

1. Повторение планиметрии. Избранные задания базового ЕГЭ.
2. Нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем. Использование свойств функции. Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы. Задачи с экономическим содержанием.
3. Производная и пределы. Тригонометрические уравнения в ЕГЭ. Методы решения неравенств.
4. Избранные вопросы стереометрии. Задачи с параметрами.

Курс рассчитан на два учебных года по два часа аудиторных занятий в неделю. Общий объем развернутого курса — 136 часов. При этом не весь объем содержания элективного курса является строго обязательным. Доминанта умений и позитивного опыта может быть обеспечена на любом завершенном разделе по выбору учителя. Таким образом, возможен вариант, при котором ученик выполняет обязательный набор заданий только по одному разделу. Кроме того, обучение может осуществляться в виде различных комбинаций предложенных разделов.

Содержание данного элективного курса будет полезно для учащихся 10—11 классов, которым интересна элементарная математика и ее приложения, так как он освещает вопросы, оставшиеся за рамками школьного курса математики, и выполняет следующие основные функции:

› развивает содержание базовых учебных предметов по математике. Это позволяет поддерживать их изучение на углубленном уровне и дополнительно подготовить учащихся к сдаче ЕГЭ;

› удовлетворяет познавательный интерес обучающихся, выбравших для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира.

Таким образом, одной из важных задач элективного курса является не только прагматическая составляющая по развитию интереса к математике как необходимому средству для поступления в вуз, но и формирование у учащихся интереса к математике как науке. Ученик должен получать эстетическое удовольствие от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам. В математике эквивалентом эксперимента предметов естественнонаучного цикла является решение задач, поэтому и курс строится на решении различных по степени важности и трудности задач.

Направленность курса — развивающая. Он ориентирован прежде всего на удовлетворение и поощрение любознательности старших школьников, их аналитических и синтетических способностей.

В процессе реализации элективного курса можно использовать разнообразные подходы к организации занятий: академические лекции, семинары, уроки, проектную и исследовательскую деятельность, практики, игровые технологии и т. д.

Предполагается, что в результате изучения курса учащиеся овладеют:

› навыками математического моделирования при решении задач различной степени сложности; знаниями, связанными с равносильностью уравнений и неравенств на множестве, что позволяет единообразно решать большие классы задач;

› нестандартными методами решений уравнений и неравенств с использованием свойств функций;

- геометрическими сведениями, которые не только помогают углубить знания по геометрии, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении геометрии, но и предоставляют хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к профильному единому экзамену по математике в ее геометрической части;
- навыками решения нестандартных задач, включая задачи с параметром. Для этого предложена классификация таких задач и указаны характерные внешние признаки в их формулировках, позволяющие школьникам отнести задачу к тому или иному классу;
- умениями, связанными с работой с научно-популярной и справочной литературой;
- элементами исследовательских процедур, связанных с поиском, отбором, анализом, обобщением собранных данных, представлением результатов самостоятельного микроисследования.

В рамках данного элективного курса предполагаются различные виды текущего и итогового контроля: тесты, самостоятельные работы, выполнение проектов и исследовательских работ.

Способ изложения материала в проектах побуждает учащихся не просто механически запоминать учебный материал, а размышлять над ним в процессе обучения.

Элективный курс предоставляет учителю и ученику дополнительные материалы как теоретического, так и прикладного характера практически по каждой теме, затронутой в программе. Кроме того, отдельные разделы курса могут послужить основой для докладов на математических кружках и факультативах.

Таким образом, элективный курс «Избранные разделы математики для старшей школы» имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся; в нем используется целый ряд межпредметных связей.

ПРИМЕРНОЕ УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА В 10—11 КЛАССАХ

№	Наименование разделов и дисциплин	Всего часов	Лекции	Выполнение практических заданий	Вид контроля
Методическое обеспечение I раздела		**34**	**14**	**20**	Самостоятельные работы
1	Повторение планиметрии	26	14	12	
1.1	Теорема Стюарта и параметры треугольников	3	2	1	
1.2	Теорема Чевы. Пересечение высот в треугольнике	4	2	2	
1.3	Леонард Эйлер — величайший математик всех времен и народов	6	4	2	
1.4	Теорема Птолемея	3	1	2	
1.5	Треугольник в треугольнике	3	1	2	
1.6	Теоремы Карно	3	2	1	
1.7	Теоремы о средних	4	2	2	
2	Избранные задания базового ЕГЭ	8		8	
Методическое обеспечение II раздела		**34**	**16**	**18**	Самостоятельные работы
1	Нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем. Использование свойств функции	12	6	6	
1.1	Дробно-рациональные уравнения	2	1	1	
1.2	Иррациональные уравнения	2	1	1	
1.3	Тригонометрические уравнения. Отбор корней	2	1	1	
1.4	Показательные уравнения	2	1	1	
1.5	Логарифмические уравнения	2	1	1	

Окончание табл.

№	Наименование разделов и дисциплин	Всего часов	Лекции	Выполнение практических заданий	Вид контроля
1.6	Системы уравнений	2	1	1	
2	Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы	16	8	8	
3	Задачи с экономическим содержанием	6	2	4	
Методическое обеспечение III раздела		**34**	**16**	**18**	Самостоятельные работы
1	Производная и пределы	16	8	8	
1.1	Определение предела и производной в курсе математического анализа	4	2	2	
1.2	Производная функции	4	2	2	
1.3	Монотонность функции	4	2	2	
1.4	Вопросы математического анализа в задачах ЕГЭ	4	2	2	
2	Тригонометрические уравнения в ЕГЭ	8	4	4	
3	Методы решения неравенств	10	4	6	
Методическое обеспечение IV раздела		**34**	**12**	**22**	Самостоятельные работы
1	Избранные вопросы стереометрии	26	10	16	
1.1	Формула Ньютона-Симпсона	4	2	2	
1.2	Объем многогранника, в который вписан шар	4	2	2	
1.3	Объемы тетраэдров, имеющих равный трехгранный угол	4	2	2	
1.4	Теоремы Паппа-Гюльдена	6	2	4	
1.5	Стереометрическое задание в ЕГЭ	8	2	6	
2	Задачи с параметрами	8	2	6	

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ I РАЗДЕЛА

1. Повторение планиметрии

1.1. Теорема Стюарта и параметры треугольников

Теорем и задач, которые вошли в учебники геометрии, довольно много. Некоторые из них заслуживают особого внимания, так как обладают некоторой общностью и могут помочь в сложных заданиях ЕГЭ.

Формулы, позволяющие определить медианы и биссектрисы треугольника по заданным сторонам треугольника, являются частными случаями более общей формулы, которая является основой **теоремы Стюарта** (Мэтью Стюарт, шотландский астроном и математик, 1717—1785).

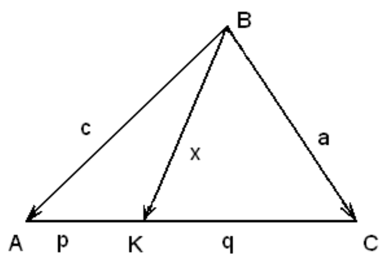

Рис. 1

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 1), в котором $AB = c$, $BC = a$, $BK = x$, $AK = p$, $KC = q$, $AC = b$. Задача состоит в том, чтобы по заданным четырем параметрам — a, c, p, q — определить отрезок BK.

Решение. Воспользуемся известным равенством для векторов $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BK} = \vec{x}$: $\overrightarrow{BK} = \frac{p}{p+q} \cdot \vec{a} + \frac{q}{p+q} \cdot \vec{c}$, из которого после возведения в квадрат получаем выражение: $x^2 = \frac{p^2}{(p+q)^2} \cdot a^2 + \frac{q^2}{(p+q)^2} \cdot c^2 + \frac{2pq}{(p+q)^2} \vec{a} \cdot \vec{c}$.

С другой стороны, $2\vec{a} \cdot \vec{c} = a^2 + c^2 - b^2$.

Таким образом, после подстановки и некоторых преобразований можно получить формулу для определения отрезка BK:

$$x^2 = \frac{p}{p+q} \cdot a^2 + \frac{q}{p+q} \cdot c^2 - pq.$$

Тот же результат можно получить, если записать теорему косинусов для треугольников ABK и ABC, выбрав общий угол A.

Частные случаи этой формулы

1. Пусть BK является медианой. Тогда $p = q = \frac{b}{2}$ и имеем формулу для расчета медиан:

$$m^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

2. Пусть BK является биссектрисой. Тогда $p/q = c/a$ и получаем формулу для биссектрисы:

$$l^2 = ac - pq.$$

3. Если BK — отрезок в равнобедренном треугольнике, то в этом случае

$$x^2 = a^2 - pq,$$

где a — боковая сторона треугольника.

Следующие формулы для биссектрисы являются необходимым дополнением к решению треугольников.

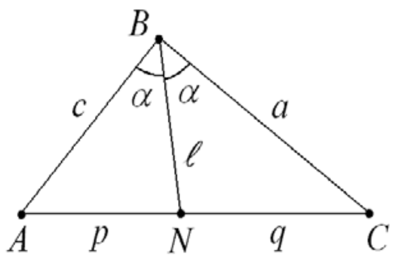

Рис. 2

$$l = \frac{2ac \cdot \cos\alpha}{a + c} \quad (1)$$

легко получается из простого соотношения:

$S_{ABN} + S_{BNC} = S_{ABC}$ (все обозначения соответствуют рис. 2).

Формула для биссектрисы, выраженная через три стороны треугольника, получается после ряда преобразований. Так как $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 2\alpha = (a+c)^2 - 4ac \cdot \cos^2\alpha$, откуда $\cos^2\alpha = \frac{(a+c)^2 - b^2}{4ac}$, то формулу (1) для биссектрисы легко преобразовать в следующую:

$$l^2 = \frac{4a^2c^2\cos^2\alpha}{(a+c)^2} = \frac{ac}{(a+c)^2} \cdot \left((a+c)^2 - b^2\right) = ac - \frac{acb^2}{(a+c)^2}.$$

Таким образом, имеем

$$l = \sqrt{ac \cdot \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)}.$$

Учитывая, что $p/q = c/a = (b-q)/q$, получаем еще ряд полезных соотношений: $q = \dfrac{ab}{a+c}$, $p = \dfrac{bc}{a+c}$, включая и полученный ранее результат $l^2 = ac - pq$.

1.2. Теорема Чевы.
Пересечение высот в треугольнике

В обязательный минимум содержания основных образовательных программ профильного уровня по геометрии входят известные теоремы планиметрии: теорема Чевы и теорема Менелая. Данные теоремы интересны и своими следствиями.

Прежде всего обратимся к самой теореме Чевы (Джованни Чева, итальянский математик, 1648—1734).

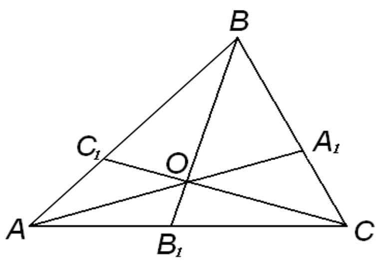

Рис. 3

Теорема Чевы. Если на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC (рис. 3) взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1, то отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1 = B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A$ (2).

Доказательство

В основе доказательства прямой теоремы лежат следующие соображения. Пусть отрезки пересекаются в точке O, тогда $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{S_{AOB_1}}{S_{B_1OC}} = \dfrac{S_{ABB_1}}{S_{B_1BC}} = \dfrac{S_{ABB_1} - S_{AOB_1}}{S_{B_1BC} - S_{B_1OC}} = \dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$. При выводе был использован принцип равных отношений: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

Таким образом, имеем: $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$, $\dfrac{BC_1}{C_1A} = \dfrac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$, $\dfrac{A_1C}{BA_1} = \dfrac{S_{AOC}}{S_{AOB}}$. Перемножая эти выражения, получаем соотношение (2).

В обратной теореме на сторонах треугольника взяты точки C_1, A_1, B_1 так, что выполняется равенство (2). Пусть точка $O = AA_1 \cap CC_1$. Проведем BO, которая пересекается с AC в точке B_2. По доказанному выше имеем равенство: $AB_2 \cdot CA_1 \cdot BC_1 = B_2C \cdot A_1B \cdot C_1A$. Поделив оба выражения друг на друга почленно, окончательно приходим к выводу, что $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB_2}{B_2C}$, то есть точки B_1 и B_2 делят сторону AC в одном и том же отношении, что означает совпадение этих точек и исходные отрезки пересекаются в одной точке.

Воспользовавшись этим результатом, докажем теперь теорему о пересечении чевиан.

Теорема о пересечении чевиан. Чевианы в треугольнике ABC точкой пересечения O делятся в отношении $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C}$, считая от вершины.

Доказательство

С одной стороны, $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$ и $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$. Откуда следует, что $\frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BOC} + S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AOC}}{S_{AOC}}$. С другой стороны, получаем такой же результат из другого условия: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BB_1 - OB_1}{OB_1} = \frac{S_{ABC} - S_{AOC}}{S_{AOC}}$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Частные случаи этой формулы

В случае медиан получаем классический результат: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = 1 + 1 = 2$ или $\frac{BO}{OB_1} = \frac{2}{1}$.

В случае пересечения биссектрис следует учесть, что $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{AC}$ и $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{CA}$. Таким образом, имеем $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC + BA}{CA}$.

При пересечении высот следует учесть, что каждый отрезок можно записать через высоты и углы треугольника: $\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{BC_1}{C_1A}+\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{CC_1\cdot\operatorname{ctg}B}{CC_1\cdot\operatorname{ctg}A}+\dfrac{AA_1\cdot\operatorname{ctg}B}{AA_1\cdot\operatorname{ctg}C}$.

В результате получаем

$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B}.$$

Конечно, данный результат можно получить и другим путем, не используя теорему о чевианах. Однако такой подход наиболее оптимален.

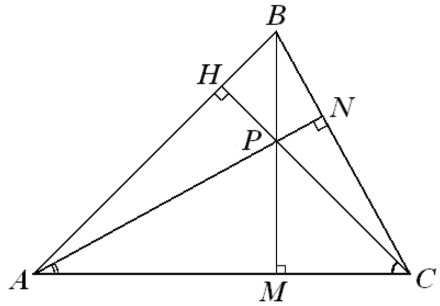

Рис. 4

Задача. В треугольнике ABC точка P — ортоцентр, угол ABC равен β, $BP = a$. Найдите радиус описанной окружности треугольника.

Р е ш е н и е. Рассмотрим случай остроугольного треугольника (рис. 4) и воспользуемся ранее полученной формулой $\dfrac{BP}{PM}=\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B}$.

Таким образом, имеем $PM=\dfrac{a\cdot\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C}$. С другой стороны,

$AC = AM + MC = PM\cdot(\operatorname{ctg}\angle PAC+\operatorname{ctg}\angle PCA) = PM\cdot(\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}A) = a\cdot\operatorname{tg}B$,

и тогда $R=\dfrac{AC}{2\sin B}=\dfrac{a}{2\cos\beta}$.

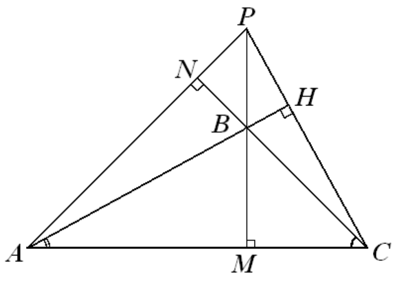

Рис. 5

Рассмотрим случай тупоугольного треугольника (рис. 5). Воспользуемся формулой $\dfrac{BP}{BM}=\dfrac{\operatorname{tg}\angle PAC+\operatorname{tg}\angle PCA}{\operatorname{tg}\angle APC}$. Из рисунка следует, что $\dfrac{BP}{BM}=\dfrac{\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A}{\operatorname{tg}(180^\circ-B)}$.

Таким образом, $BM=-\dfrac{a\cdot\operatorname{tg}B}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}C}$. С другой стороны,

$AC = AM + MC = BM\cdot(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A) = -a\cdot\operatorname{tg}B$. Тогда $R=\dfrac{AC}{2\sin B}=-\dfrac{a}{2\cos\beta}$.

Данная задача была предложена на олимпиаде «Будущие исследователи» в 2008 году. В ЕГЭ 2010 года она звучит следующим образом: «Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *P*. Известно, что отрезок *BP* равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол *ABC*». Из полученных формул следует, что угол равен либо 60 либо 120°. Возможно и геометрическое решение этой задачи, но для этого нужно описать окружность вокруг треугольника.

1.3. Леонард Эйлер — величайший математик всех времен и народов

Леонард Эйлер (1707—1783) родился в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. Первые уроки Леонард получил дома от отца. Когда Леонард подрос, его перевезли к бабушке в Базель, где он впоследствии стал учиться в гимназии, продолжая изучать математику. Учась в последних классах гимназии, он посещал лекции по математике в Базельском университете, которые читал Иоганн Бернулли. Вскоре Эйлер стал самостоятельно изучать первоисточники, а по субботам Бернулли беседовал с талантливым студентом. Леонард подружился с его сыновьями, особенно с Даниилом. В 1723 году Эйлер получил степень магистра искусств. В 1727 году он предпринял попытку занять кафедру физики в родном университете, но ему это не удалось. Он принял решение ехать в Петербург, куда был приглашен работавшими там Даниилом и Николаем Бернулли. В Петербурге Эйлер сформировался как великий ученый.

К 35 годам из-за постоянных перегрузок Эйлер подорвал здоровье: он перенапряг зрение и ослеп на один глаз. В 1740 году из-за проблем со здоровьем и по причине политической неустойчивости в России он принял предложение прусского короля Фридриха II о переходе в Берлинскую Академию и уехал в Берлин. Со временем ситуация в России изменилась: на трон взошла Екатерина II, которой очень хотелось вернуть великого ученого.

В 1766 году Эйлер возвратился в Россию. Вскоре после приезда ученый полностью лишился зрения, однако работоспособность Эйлера не снизилась.

Во второй петербургский период написана половина всех его работ.

Умер Эйлер в 1783 году, оставив огромное научное наследие по математике, физике, астрономии, которое до сих пор издается в Швейцарии. Похоронен ученый в Александро-Невской лавре. Его могила находится недалеко от могилы М. В. Ломоносова.

Ниже нами приведены несколько теорем и формул, носящих имя Эйлера.

Расстояние между центрами вписанной и описанной окружности в треугольнике

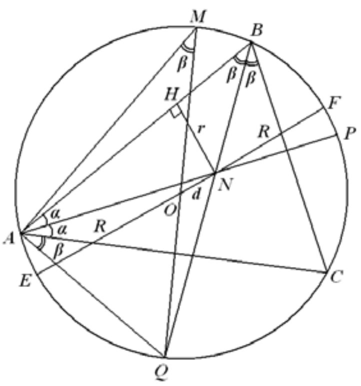

Рис. 6

Пусть в треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка N — центр вписанной окружности, угол CBA равен 2β, а угол BAC равен 2α, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности (рис. 6). Проведены биссектрисы углов A и B до пересечения с описанной окружностью и два диаметра EF и QM.

По теореме о пересечении хорд имеем равенство: $EN \cdot NF = BN \cdot NQ$. Угол $NAQ = \alpha + \beta$, а угол $ANQ = \dfrac{\cup AEQ + \cup BFP}{2} = \dfrac{2\alpha + 2\beta}{2} = \alpha + \beta$. Таким образом, треугольник ANQ равнобедренный. Из треугольника AMQ имеем $AQ = 2R\sin\beta$, а из треугольника HBN: $BN = \dfrac{r}{\sin\beta}$. Подставляя все отрезки в формулу с хордами, получаем равенство $(R + d)(R - d) = 2R\sin\beta \cdot \dfrac{r}{\sin\beta}$

или

$$d^2 = R^2 - 2Rr\,.$$

Следствием из формулы является то, что в любом треугольнике радиус описанной окружности не меньше удвоенного радиуса вписанной окружности.

Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний.

Теорема о прямой Эйлера

В любом треугольнике центр описанной окружности O, ортоцентр P и точка пересечения медиан M лежат на одной прямой, причем точка M делит отрезок OP так, что $\dfrac{PM}{MO}=\dfrac{2}{1}$.

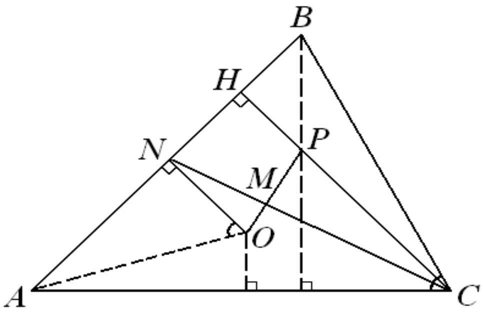

Рис. 7

Доказательство. Прежде чем перейти к доказательству, следует напомнить известное в планиметрии тригонометрическое тождество для треугольника: $\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C$, которое легко доказывается, если в правую часть подставить следующее равенство:

$$\operatorname{tg} C=-\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B-1}.$$

Итак, в треугольнике ABC CH — высота, NO — серединный перпендикуляр, точка O — центр описанной окружности, точка P — ортоцентр (рис. 7). Пусть точка M есть пересечение медианы NC и отрезка PO. Из подобия треугольников NOM и PMC следует пропорция $\dfrac{PC}{ON}=\dfrac{PM}{OM}=\dfrac{MC}{NM}$. Теорема будет доказана, если будет доказано, что $\dfrac{PC}{ON}=\dfrac{2}{1}$. Итак, $\dfrac{PC}{CH-PC}=\dfrac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}$. Откуда следует, что $PC=CH\cdot\dfrac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}=CH\cdot\dfrac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C}$.

Учитывая, что $\angle ACB=\angle AON$, имеем $ON=\dfrac{AB}{2\operatorname{tg} C}$, где $AB=AH+HB=CH\cdot(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B)$. Таким образом, $ON=\dfrac{CH}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C}$, что означает выполнение равенства $\dfrac{PC}{ON}=\dfrac{2}{1}$. Теорема доказана.

Теорема Эйлера для четырехугольника

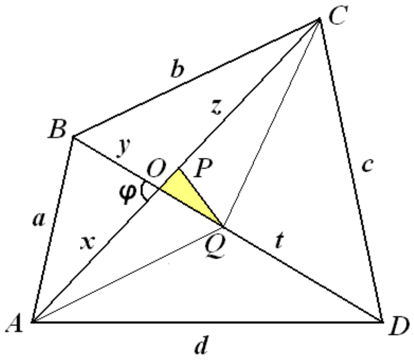

Рис. 8

Пусть x, y, z, t — отрезки диагоналей четырехугольника со сторонами a, b, c, d (рис. 8). Угол между диагоналями φ, P — середина AC, а Q — середина BD, тогда $OP = \frac{x+z}{2} - z = \frac{x-z}{2}$ и $OQ = \frac{t-y}{2}$.

Теорема косинусов для ΔOPQ имеет вид:

$$PQ^2 = \left(\frac{t-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-z}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t-y}{2}\right)\cdot\left(\frac{x-z}{2}\right)\cos\varphi, \text{ или}$$

$$4PQ^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2ty - 2xz - 2(tx + yz - yx - zt)\cos\varphi.$$

Рассмотрим треугольники AOB, AOD, BOC, COD. Для них выполняются равенства:

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi \\ b^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\varphi \\ c^2 = z^2 + t^2 + 2zt\cos\varphi \\ d^2 = x^2 + t^2 - 2xt\cos\varphi \end{cases},$$

из которых следует, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 - 2(yz + xt - zt - xy)\cos\varphi.$$

Таким образом, $4PQ^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - x^2 - y^2 - z^2 - t^2 - 2ty - 2xz =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (x+z)^2 - (y+t)^2$,

или

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4PQ^2,$$

что и составляет содержание теоремы Эйлера.

В случае трапеции в наших обозначениях имеем $PQ = (d-b)/2$ и $BC \parallel AD$, тогда $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + (d-b)^2 \Rightarrow a^2 + c^2 + 2db = d_1^2 + d_2^2$.

В случае же параллелограмма $PQ = 0$, $a = c$ и $b = d$, тогда

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right).$$

Последней формулой можно воспользоваться для более простого доказательства теоремы Эйлера: если считать $\Delta\, ABD$ как половину соответствующего параллелограмма, то $a^2 + d^2 = 2\left(QB^2 + AQ^2\right)$.

Аналогично, считая треугольник BCD половиной параллелограмма, имеем $b^2 + c^2 = 2\left(QC^2 + BQ^2\right)$.

Таким образом, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4BQ^2 + 2(AQ^2 + CQ^2)$.

Теперь считаем треугольник ACQ половиной параллелограмма. В этом случае $AQ^2 + CQ^2 = 2(PQ^2 + AP^2)$. Учитывая, что $4BQ^2 = d_2^2$, $4AP^2 = d_1^2$, получаем формулу Эйлера.

Из той же системы равенств получаем следующую цепочку:

$a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = \left(xy + zt + yz + xt\right)2\cos\varphi \Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2\left(x+z\right)\left(y+t\right)\cos\varphi$,

откуда окончательно имеем выражение

$$a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2\, d_1 d_2 \cos\varphi.$$

Таким образом, диагонали четырехугольника принадлежат перпендикулярным прямым тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

Задачи на теорему Эйлера

1. В трапеции $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, $AD = a$, $BC = b$ — основания, $\angle AOD = 120^\circ$. Доказать, что $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = d_1 d_2$.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны равны: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$, $AD = 5$. Найти угол между диагоналями (олимп.).

1.4. Теорема Птолемея

Клавдий Птолемей (ок. 100 — ок. 178) — древнегреческий астроном, математик, географ. Он ввел понятия широты и долготы местности. Автор «Великого математического построения астрономии в 13 книгах» («Альмагест»), в котором в частности изложены сведения по прямолинейной и сферической тригонометрии и дана теорема о выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность. Благодаря теореме он составил таблицу хорд, которой воспользовался для астрономических вычислений.

Теорема. Сумма произведений двух пар противоположных сторон вписанного четырехугольника равна произведению его диагоналей: $d_1d_2 = ac+bd$.

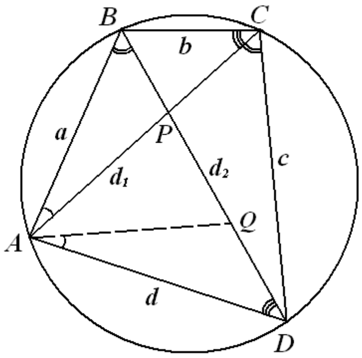

Рис. 9

Доказательство прямой теоремы соответствует авторскому и связано с небольшим дополнительным построением. Проведем отрезок AQ так, чтобы углы QAD и BAC были равны (рис. 9). Из подобия треугольников QAD и BAC следует равенство $\frac{b}{QD} = \frac{d_1}{d}$ или $d_1 \cdot QD = bd$.

Из подобия треугольников QAB и ACD следует равенство $\frac{c}{QB} = \frac{d_1}{a}$ или

$d_1 \cdot QB = ac$.

Сложив равенства $d_1 \cdot QD + d_1 \cdot QB = bd + ac$, получаем $d_1d_2 = ac + bd$.

Задачи на теорему Птолемея

1. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M, отличная от A, B и C. Доказать, что один из отрезков AM, AB, AC равен сумме двух других.

2. В шестиугольнике $ABCDEF$, вписанном в окружность, $AC = CE = EA$, $BE + DA + FC = p$. Найти периметр шестиугольника.

3. На гипотенузе треугольника ABC с катетами a и b построен квадрат. Найдите расстояние от вершины треугольника C до точки пересечения диагоналей квадрата.

4. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 9$, $BC = CD = 11$, $AD = 15$ и диагональю $AC = 16$.

а) Докажите, что около него можно описать окружность.

б) Найдите диагональ BD.

Ответ: $\cos B = -\dfrac{3}{11}$, $\cos D = \dfrac{3}{11}$, $BD = \dfrac{33}{2}$.

1.5. Треугольник в треугольнике

Многие задачи планиметрии, особенно задачи С4 из единого государственного экзамена, имеют общее решение в виде удобной формулы, из которой при конкретных значениях параметров, входящих в выражение, можно получить какой-либо численный результат. Попробуем получить общую формулу для площади в случае вписанного в треугольник треугольника.

Рассмотрим треугольник ABC, у которого на сторонах AB, BC и AC отмечены соответственно точки P, Q, N и соответствующие отрезки обозначены так, как на рис. 10.

Так как площади треугольников, имеющих равный угол, относятся как произведения сторон, заключающих этот угол, то выпишем площади треугольников S_1, S_2, S_3 через стороны и площадь исходного треугольника ABC: $S_1 = S \cdot \dfrac{z_1 y_2}{bc}$, $S_2 = S \cdot \dfrac{z_2 x_1}{ac}$, $S_1 = S \cdot \dfrac{z_1 y_2}{bc}$. Площадь треугольника

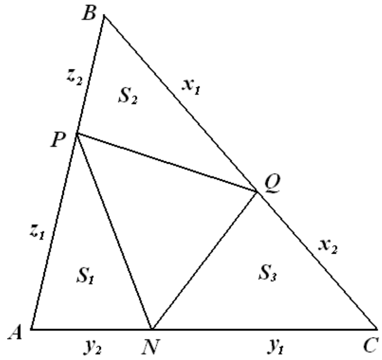

Рис. 10

PQN найдем из следующей формулы: $S_{PQN} = S \cdot (1 - S_1 - S_2 - S_3)$. Воспользовавшись тем, что стороны треугольника представляют собой суммы соответствующих отрезков, получим выражение для площади треугольника *PQN*: $S_{PQN} = S \cdot \dfrac{x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2}{abc}$. В случае чевиан формула упрощается: $S_{PQN} = 2S \cdot \dfrac{x_1 y_1 z_1}{abc}$.

Применим полученную таким образом формулу в двух частных случаях.

1. Пусть *P, Q, N* — основания медиан. В этом случае $S_{PQN} = S \cdot \dfrac{2\frac{a}{2}\frac{b}{2}\frac{c}{2}}{abc} = \dfrac{S}{4}$.

2. Пусть *PQN* — это ортотреугольник (рис. 11), то есть треугольник, вершины которого являются основаниями высот треугольника *ABC* (в данном случае остроугольного треугольника). Четырехугольник *BPOQ* можно вписать в окружность. Следовательно, углы *BQP* и *BOP* равны. Так как $\angle BOP = 90° - \angle NBB = \angle BAC$, то ΔBPQ подобен ΔABC по двум углам.

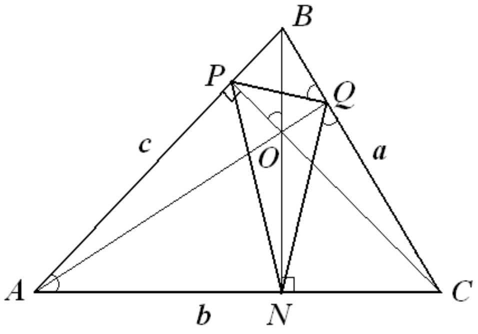

Рис. 11

Аналогично $\Delta APN \sim \Delta ABC$ и $\Delta NQC \sim \Delta ABC$. Из подобия треугольников *APN* и *ABC* следует равенство:

$$\frac{PN}{a} = \frac{AP}{b} = \frac{AN}{c} = \cos\alpha.$$

Учитывая, что косинусы углов треугольника являются коэффициентами подобия, получаем формулу площади ортотреугольника в виде $S_{PQN} = S \cdot (1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)$.

С другой стороны, отрезки, обозначенные на рис. 11, записываются через стороны исходного треугольника и те же косинусы углов, а именно: $x_1 = c \cdot \cos\beta$, $x_2 = b \cdot \cos\gamma$, $y_1 = a \cdot \cos\gamma$, $y_2 = c \cdot \cos\alpha$, $z_1 = b \cdot \cos\alpha$, $z_2 = a \cdot \cos\beta$.

Подставляя эти отрезки в полученную в начале формулу площади, получаем следующий результат: $S_{PQN} = 2S \cdot \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

Приравнивая обе формулы для площади треугольника *PQN*, получаем одно из тригонометрических тождеств в треугольник в виде $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ либо в другой записи $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$.

1.6. Теоремы Карно

Лазар Никола Карно (1753—1823) — французский военный и государственный деятель периода Французской революции, военный инженер и математик. Его математические труды относятся к анализу и геометрии. Теоремы Карно являются примером практико-ориентированных задач времен наполеоновских войн. Наглядно чувствуются серьезные проблемы, решаемые военным инженером Карно по оптимальному построению редутов и флешей с целью обеспечения быстрейшего подхода орудийной прислуги к пушкам и мортирам.

Формула Карно. В остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей (в тупоугольном треугольнике расстояние от центра окружности до наибольшей стороны берется в формуле со знаком минус).

Доказательство. Запишем теорему Птолемея для каждого из четырехугольников: *AMOK*, *MBNO*, *NCKO* (рис. 12):

$$\left[\begin{array}{l} z \cdot \dfrac{b}{2} + y \cdot \dfrac{c}{2} = MK \cdot R = \dfrac{a}{2} \cdot R, \\ x \cdot \dfrac{c}{2} + z \cdot \dfrac{a}{2} = NM \cdot R = \dfrac{b}{2} \cdot R, \\ x \cdot \dfrac{b}{2} + y \cdot \dfrac{a}{2} = NK \cdot R = \dfrac{c}{2} \cdot R. \end{array}\right.$$

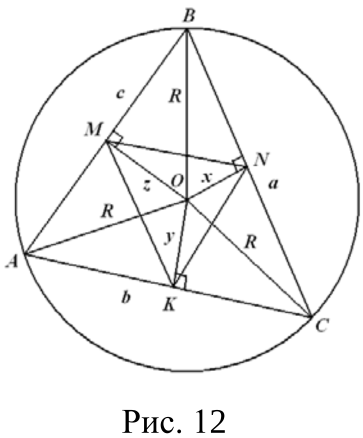

Рис. 12

После сложения получаем выражение: $x\cdot\left(\frac{c}{2}+\frac{b}{2}\right)+y\cdot\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right)+z\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)=p\cdot R$. Добавим в левую и правую части выражения площадь треугольника, записанную в двух вариантах: $S=x\cdot\frac{a}{2}+y\cdot\frac{b}{2}+z\cdot\frac{c}{2}=p\cdot r$. В результате получаем формулу Карно:

$$x+y+z=R+r.$$

С другой стороны, так как $\alpha=\angle A=\angle NOC$, $\beta=\angle B=\angle KOC$, $\gamma=\angle C=\angle MOB$.

Учитывая, что каждый из отрезков можно выразить через радиус и угол по формулам: $x=R\cos\alpha$, $y=R\cos\beta$, $z=R\cos\gamma$, то в результате получаем выражение $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}$. Учитывая неравенство, которому удовлетворяют радиусы в треугольнике $R\geq 2r$, получаем неравенство для косинусов $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}$.

Критерий Карно

Если на сторонах *AB, BC* и *CA* треугольника *ABC* (рис. 13) взяты соответственно точки *P, Q, N*, то перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в этих точках, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2 \quad (3).$$

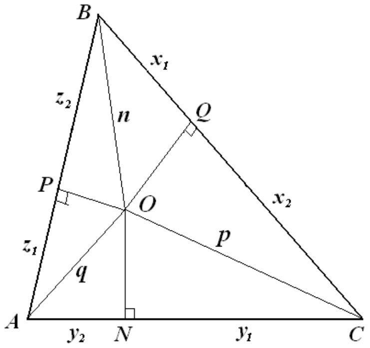

Рис. 13

Что касается прямой теоремы, то она следует из записи теоремы Пифагора для треугольников, на которые разбивается треугольник *ABC*:

$$\begin{cases} n^2-x_1^2=p^2-x_2^2 \\ p^2-y_1^2=q^2-y_2^2 \\ q^2-z_1^2=n^2-z_2^2. \end{cases}$$

При сложении равенств получаем критерий Карно.

В обратной теореме дано выражение (3) и соответственно точки P, Q, N на сторонах треугольника и доказывается, что перпендикуляры пересекаются в одной точке. Пусть $NO \cap QO$. Из точки O опустим перпендикуляр на AB, разделив сторону на отрезки t_1 и t_2. Тогда по прямой теореме можно записать следующее равенство: $x_1^2 + y_1^2 + t_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + t_2^2$. Вычитая из выражения (3) последнее равенство и учитывая, что $z_1 + z_2 = t_1 + t_2 = c$, получаем сначала $z_1 - z_2 = t_1 - t_2$, потом $z_1 = t_1$, $z_2 = t_2$.

Таким образом, перпендикуляр, опущенный из точки O на сторону AB, совпадает с PO, и все три восстановленных перпендикуляра к сторонам треугольника ABC пересекаются в одной точке.

1.7. Теоремы о средних

В алгебре известны неравенства, связывающие различные типы средних величин, составленных из двух величин. Перед нами последовательность среднего квадратичного, среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического:

$$\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}} \geq \frac{b + a}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Каждое из неравенств доказать достаточно легко: возводим в квадрат, переносим в одну сторону и получаем полный квадрат разности $(b - a)^2 \geq 0$. Но есть очень полезная геометрическая интерпретация этих неравенств, которую мы и рассмотрим.

Перед нами трапеция с основаниями a и b, причем $b < a$, в которой проведены диагонали, отрезок PQ и отрезок MN длиной x (рис. 14). Найдем длину отрезка PQ. Дополнительное построение $CF \parallel AB$.

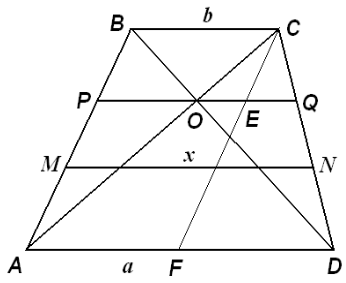

Рис. 14

Из подобия треугольников AOD и BOC следует: $\frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}$ $\frac{AO}{OC} + 1 = \frac{a}{b} + 1$ $\frac{AC}{OC} = \frac{a + b}{b}$. Из подобия треугольников ACF и EOC, а также ACD и QOC: $\frac{AC}{OC} = \frac{FC}{EC} = \frac{FD}{EQ} = \frac{a+b}{b} = \frac{a-b}{EQ}$.

Таким образом, $PQ = PE + EQ = b + b \cdot \frac{a-b}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$, то есть отрезок PQ есть среднее гармоническое оснований трапеции.

Рассмотрим подобие четырехугольников.

Определение. Два четырехугольника подобны, если у них три пары соответственных сторон пропорциональны и пары соответственных углов, заключенных между соответственными сторонами, равны.

Допустим, что отрезок MN делит трапецию на две подобных (рис. 15). В таком случае можно записать пропорцию $\frac{MN}{AD} = \frac{BC}{MN}$ или $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ и $x = \sqrt{ab}$, то есть отрезок MN есть среднее геометрическое оснований трапеции.

Отрезок MN делит трапецию на две трапеции, площади которых относятся как $\frac{m}{n}$.

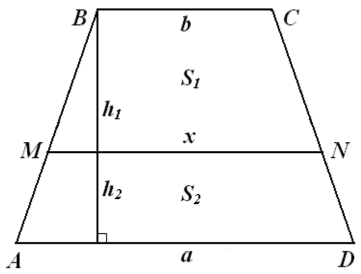

Рис. 15

Найдем MN при условии, что $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$, а $MN = x$.

Тогда площади равны

$$\begin{cases} S_1 = \frac{b+x}{2} h_1 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot (h_1 + h_2) \\ S_2 = \frac{a+x}{2} h_2 = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot (h_1 + h_2) \end{cases}.$$

После преобразований имеем $\begin{cases} \frac{h_2}{h_1} = \frac{b+x}{a+x} \cdot \frac{n}{m} \\ \frac{b+x}{2} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) \end{cases}$. Окончательно получаем: $x^2 = \frac{ma^2 + nb^2}{m+n}$.

Таким образом, при равенстве площадей отрезок MN есть среднее квадратичное оснований трапеции $\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}}$.

Каков порядок расположения отрезков в трапеции? Так как площадь трапеции равна сумме площадей двух трапеций $\frac{b+x}{2}h_1+\frac{a+x}{2}h_2=\frac{a+b}{2}\cdot(h_1+h_2)$, то $\frac{h_1}{h_2}=\frac{x-b}{a-x}$. Если x — среднее гармоническое, то $\frac{h_1}{h_2}=\frac{b}{a}<1$. Если x — среднее геометрическое, то $\frac{h_1}{h_2}=\sqrt{\frac{b}{a}}>\frac{b}{a}$, то есть выполняется последнее неравенство. Если x — среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$, то $\frac{h_1}{h_2}=1>\sqrt{\frac{b}{a}}$ и выполняется среднее неравенство. Наконец, если x — среднее квадратичное, то $\frac{h_1}{h_2}>1$, так как $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-b>a-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Таким образом, выполняется первое неравенство.

Задача на среднее гармоническое. Теплоход имеет собственную скорость 20 км/ч. Путь вниз по реке занял на 2 часа меньше, чем обратный. С какой средней скоростью передвигался теплоход, если скорость течения реки 4 км/ч?

Данную задачу, взятую из известного сборника, имеет смысл решить двумя способами. В первом способе используем эти 2 часа разницы между движениями вверх и вниз. Пусть S — это расстояние между пристанями. Тогда $S/24$ — время движения вниз по реке, а $S/16$ — время движения вверх по реке. Уравнение для определения пройденного пути имеет вид $\frac{S}{16}-2=\frac{S}{24}$. Откуда находим путь $S = 96$ и полное время движения $t = 4 + 6 = 10$ часов. Таким образом, средняя скорость теплохода $V=\frac{2S}{t}=19{,}2$ км/ч.

На самом деле для определения средней скорости знание о двух часах излишнее в этой задаче, так как скорость следует из формулы:

$$V=\frac{2S}{\frac{S}{16}+\frac{S}{24}}=\frac{2}{\frac{1}{16}+\frac{1}{24}}=\frac{2\cdot 48}{5}=19{,}2\,.$$

Симметрические многочлены в треугольнике и теоремы о средних величинах

В программе углубленного изучения школьной алгебры можно встретить цепочку классических неравенств для трех положительных чисел

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

В роли трех параметров могут выступать, например какие-либо элементы треугольника. Начнем с самого простого — со сторон треугольника *a*, *b*, *c*. В качестве известных величин будем считать радиусы *R*, *r* и полупериметр *p*. Итак, первые две формулы известны:

$$a+b+c=2p \quad (4),$$

$$abc=4Rrp \quad (5).$$

Для получения суммы удвоенных произведений воспользуемся формулой Герона: $S^2=r^2p^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Перемножив и использовав уже известные формулы, получаем третье выражение:

$$ab+bc+ac=r^2+p^2+4Rr \quad (6).$$

Таким образом, стороны треугольника являются корнями кубического уравнения: $x^3-2px^2+(r^2+p^2+4Rr)x-4Rrp=0$ при ограничении $0<x<p$.

Задача. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 20, радиус вписанной окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 5.

Решение. Имеем известные формулы для периметра и площади треугольника, из которых составляются формулы Виета. В данном случае это следующие выражения: $\begin{cases} a+b+c=20 \\ ab+ac+bc=121 \\ abc=200 \end{cases}$. Таким образом, получаем уравнение: $x^3-20x^2+121x-200=0$. Возможные рациональные корни являются целыми, а целые корни — среди делителей числа 200. Так как задача геометрическая, то ищем делители в интервале (0; *p*), то есть 1, 2, 4, 5, 8. Находим, что это 8. Разделив по схеме Горнера, получаем квадратное уравнение $x^2 - 12x + 25 = 0$ и корни $\left[\begin{array}{l} x = 6 + \sqrt{11} \\ x = 6 - \sqrt{11} \end{array}\right.$.

Если выражение (6) разделить на выражение (5), то получим еще одну дополнительную формулу: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{p} + \frac{r^2 + p^2}{4Rrp}$. Подставим полученные выражения для сторон в приведенные выше неравенства. Первая пара $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$ преобразуется в $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = \sqrt{\frac{4p^2 - 2(4Rr + r^2 + p^2)}{3}} \geq \frac{2p}{3}$ или $p^2 \geq 12Rr + 3r^2$. Вторая пара $\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ преобразуется в $p^2 \geq \frac{27Rr}{2}$. Наконец, из третьей пары $\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ получаем неравенство: $p^2 \geq 14Rr - r^2$.

Какое же из полученных ограничений на полупериметр является наиболее жестким? Мы ответим на этот вопрос чуть ниже. В известном журнале для школьников «Квант» в № 5—6 за 2014 год в статье «Пять окружностей» представлен материал по вневписанным окружностям. В частности после получения основных формул для радиусов и симметрических многочленов из них они были использованы в теоремах о средних величинах. Воспроизведем результаты, полученные автором, более коротким путем.

Итак, известная формула для радиуса вневписанной окружности получается из площади треугольника. Пусть *H, K, N* — точки касания вневписанной окружности с центром в точке *O* со сторонами угла и треугольника (рис. 16). Тогда площадь треугольника получим по формуле: $S_{ABC} = S_{ABO} + S_{AOC} - S_{OBC}$, или

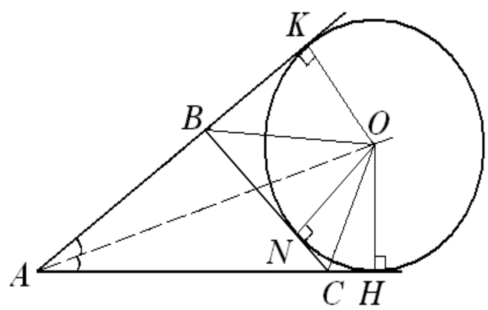

Рис. 16

$S_{ABC} = \frac{\rho \cdot c}{2} + \frac{\rho \cdot b}{2} - \frac{\rho \cdot a}{2} = \rho \cdot (p - a)$. Таким образом, $\rho_a = \frac{S}{p - a}$.

Воспользовавшись формулой для радиуса, несложно получить следующие равенства: так как $\rho_a \rho_b \rho_c = \dfrac{S^3 \cdot p}{(p-a)(p-b)(p-c)\cdot p}$, то $\rho_a \rho_b \rho_c = pS$; так как $\dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c} = \dfrac{3p-a-b-c}{S}$, то $\dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c} = \dfrac{1}{r}$. Преобразуя последнее равенство $\dfrac{\rho_b \cdot \rho_c + \rho_b \cdot \rho_a + \rho_a \cdot \rho_c}{\rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c} = \dfrac{1}{r}$, получаем третье важное равенство $\rho_b \cdot \rho_c + \rho_b \cdot \rho_a + \rho_a \cdot \rho_c = p^2$. Рассмотрим теперь сумму радиусов $\rho_c + \rho_a + \rho_b = S \cdot \left(\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \right) = S \cdot \dfrac{3p^2 - 2p(a+b+c) + (ab+ac+cb)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$ и, подставив уже упомянутые выше выражения для сторон треугольника, получим последнюю важную формулу: $\rho_c + \rho_a + \rho_b = 4R + r$.

Таким образом, мы имеем полный набор выражений и можем подставить все в теоремы о средних. Вот некоторые из них:

- первое неравенство $\sqrt{\dfrac{\rho_a^2 + \rho_b^2 + \rho_c^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{(4R+r)^2 - 2p^2}{3}} \ge \dfrac{4R+r}{3}$ после преобразования дает ограничение сверху на полупериметр $4R + r \ge p\sqrt{3}$;

- второе неравенство $\dfrac{\rho_a + \rho_b + \rho_c}{3} \ge \sqrt[3]{\rho_a \rho_b \rho_c}$ порождает второе ограничение сверху на полупериметр $(4R+r)^3 \ge 27pS$ или $\dfrac{(4R+r)^3}{27r} \ge p^2$;

- третье неравенство $\sqrt[3]{\rho_a \rho_b \rho_c} \ge \dfrac{3}{\dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c}}$ дает очередное ограничение на полупериметр снизу $p \ge 3\sqrt{3} \cdot r$;

- наконец, неравенство $\dfrac{\rho_a + \rho_b + \rho_c}{3} \ge \dfrac{3}{\dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c}}$ позволяет получить классическое выражение для треугольника $R \ge 2r$.

Конечно, последнее неравенство можно получить и менее трудоемким способом. Например, выписав три очевидных неравенства

$$\left[\begin{array}{l} a = p - b + p - c \geq 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \\ b = p - a + p - c \geq 2\sqrt{(p-a)(p-c)} \\ c = p - a + p - b \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \end{array}\right.$$ и перемножив их, получаем неравенство

$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c)$ или $4SR \geq 8\dfrac{S^2}{p}$, и в конечном счете $R \geq 2r$.

Теперь, опираясь на последний результат, можно выстроить следующую цепочку полученных выше ограничений на квадрат полупериметра: $p^2 \geq 14Rr - r^2 \geq \dfrac{27Rr}{2} \geq 12Rr + 3r^2 \geq 27r^2$. Аналогично получаем и последовательность неравенств сверху: $\dfrac{(4R+r)^3}{27r} \geq \dfrac{(4R+r)^2}{3} \geq p^2$. Таким образом, мы имеем довольно узкий диапазон для полупериметра треугольника: $\sqrt{14Rr - r^2} \leq p \leq \dfrac{4R+r}{\sqrt{3}}$.

Понятно, что равенства имеют место тогда и только тогда, когда $R = 2r$, то есть в случае равностороннего треугольника. Кстати, для прямоугольного треугольника выполняется более жесткое требование на радиусы. Так как для этих треугольников $p = 2R + r$, то подстановка этого равенства в условие $p^2 \geq 14Rr - r^2$ после решения квадратного неравенства $r^2 - 5Rr + 2R^2 \geq 0$ приводит к ограничению: $R \geq \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}r$. В самом деле, так как расстояние d между центром вписанной окружности в прямоугольном треугольнике и центром описанной окружности не меньше, чем радиус вписанной окружности, то, воспользовавшись формулой Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$ и неравенством $d^2 \geq r^2$, получаем более жесткое требование на радиусы $R \geq (\sqrt{2}+1)r$.

Есть еще параметры треугольника, из которых составляются несложные симметрические многочлены. Это высоты треугольника: $h_a = \dfrac{2S}{a}$, $h_b = \dfrac{2S}{b}$, $h_c = \dfrac{2S}{c}$. Все многочлены получаются достаточно легко, если воспользоваться уже известными формулами для сторон: $h_a h_b h_c = \frac{2S^2}{R}$, $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, $h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c = \frac{h_a h_b h_c}{r} = \frac{2Sp}{R}$, $h_1 + h_2 + h_3 = \frac{4Rr + r^2 + p^2}{2R}$. Однако в случае с высотами принципиально новых неравенств мы не получаем.

Задачи на теорему Виета для кубического многочлена

1. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 14, радиус вписанной окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 3.

2. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 18, радиус вписанной окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 4.

3. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 32, радиус вписанной окружности равен 2, а радиус описанной окружности равен 7.

4. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 38, радиус вписанной окружности равен 3, а радиус описанной окружности равен 8.

5. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 26, радиус вписанной окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 6.

6. Найдите стороны треугольника, если радиус вписанной окружности равен 2, радиус описанной окружности равен 5, а полупериметр является целым числом.

Задания для самостоятельной работы

1. Отрезок *BN* является биссектрисой треугольника *ABC*. Найдите *NC* и *BC*, если *AB* = 30, *AN* = 20 и угол *BNC* равен углу *BCA*.

Ответ: $NC = 11\frac{1}{9}$, $BC = 16\frac{2}{3}$.

2. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* проведена окружность радиуса *R*, проходящая через середину стороны *AB* и вершины *B* и *C*. Причем точка *C* является точкой касания. Найдите высоту, опущенную из вершины *B*.

Ответ: $\frac{7}{4}R$.

3. В треугольнике ABC AD и BO — биссектрисы, точка $M \in AB$, точка K лежит на продолжении стороны AC, CH — биссектриса внешнего угла DCK. Отрезки $DM \perp BO$, $DK \perp CH$, $AM = a$, $AK = b$. Найдите AD.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

4. Найдите площадь трапеции с основаниями a и b и острыми углами α и β.

Ответ: $\dfrac{a^2 - b^2}{2(\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha)}$.

5. Окружности радиусов 17 и 10 пересекаются в точках A и B. К окружностям проведена общая касательная. Найдите расстояние между точками касания, если AB = 16.

Ответ: $4\sqrt{2}$, $14\sqrt{2}$.

6. В прямоугольном треугольнике даны высота h и биссектриса l, проведенные из вершины прямого угла. Найдите медиану, проведенную из вершины прямого угла.

Ответ: $m = \dfrac{hl^2}{2h^2 - l^2}$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC CH — высота к гипотенузе треугольника, ρ — расстояние между центрами вписанных окружностей в треугольниках ACH и BCH. Найдите радиус вписанной окружности в треугольник ABC.

Ответ: $r = \dfrac{\rho}{\sqrt{2}}$.

8. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$. Диагональ BD равна 11. Расстояние от точки C до BD равно 4. Диагональ BD делит угол D в отношении 1:2. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 46,2; 51,04.

9. В трапеции $ABCD$ основания $AD = a$ и $BC = b$, $\angle CAD = \alpha$ и $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите площадь $ABCD$.

Ответ: $\dfrac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}\sin\alpha$.

10. В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. В треугольнике *ABC* биссектриса угла *A* делит высоту, проведенную из вершины *B*, в отношении 5:4, считая от точки *B*.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если *BC* = 12 см.

2. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 8 см и 15 см, а средняя линия равна 8,5 см.

3. Три окружности, радиусы которых равны 2 см, 3 см и 10 см, попарно касаются внешним образом.

Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трех окружностей.

Вариант 2

1. Радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, равен 13 см, *BC* = 24 см.

Найдите, в каком отношении, считая от вершины *B*, биссектриса угла *A* делит высоту, проведенную из этой вершины.

2. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 20 см и 21 см, а средняя линия равна 14, 5 см.

3. Три окружности, радиусы которых равны 4 см, 8 см и 12 см, попарно касаются внешним образом.

Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трех окружностей.

2. Избранные задания базового ЕГЭ

Задание № 18

1. В городе Z в 2013 году мальчиков родилось больше, чем девочек. Мальчиков чаще всего называли Андрей, а девочек — Мария. Выберите утверждения, которые следуют из приведенных данных. В 2013 году в городе Z:

1. Марий родилось больше, чем Светлан.

2. Николаев родилось больше, чем Аристархов.

3. Хотя бы одного из родившихся мальчиков назвали Андреем.

4. Андреев больше, чем Марий.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Решение заключается просто в анализе приведенных в тексте данных.

1. Марий родилось больше, чем Светлан. Да, это следует из того, что девочек чаще всего называли Мариями, а не Светланами.

2. Николаев родилось больше, чем Аристархов. Нет, в исходных данных ничего не говорится ни о Николаях, ни об Аристархах.

3. Хотя бы одного из родившихся мальчиков назвали Андреем. Да, это следует из того, что родилось немало мальчиков, и их чаще всего называли Андреем.

4. Андреев больше, чем Марий. Нет, это не следует из приведенных данных. Хотя, конечно мальчиков родилось больше, чем девочек, но однозначно утверждать с точностью до одного ребенка, что Андреев больше, чем Марий, нельзя.

Ответ: 13.

2. Известно, что Витя выше Коли, Маша выше Ани, а Саша ниже и Коли, и Маши. Выберите утверждения, которые следуют из приведенных данных.

1. Витя выше Саши; 2. Саша ниже Ани; 3. Коля и Маша одного роста; 4. Витя самый высокий из всех.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Исходные данные оформим более четко, таким вот образом (под знаком «>» подразумеваем рост)

Решение — анализ данных:

А) Витя > Коля > Саша.

Б) Маша > Саша.

В) Маша > Аня.

Анализ:

1. Витя выше Саши. Да, это следует из пункта А.

2. Саша ниже Ани. Нет, это не следует из исходных данных. Саша и Аня оба меньше Маши, но как они соотносятся между собой — неясно.

3. Коля и Маша одного роста. Нет, это не следует. Коля и Маша, действительно, оба высокие, они больше других ребят, но как они соотносятся между собой — неясно.

4. Витя самый высокий из всех. Нет, не следует. Возможно, Маша выше его.

Ответ: 1.

3. В классе в конце первого полугодия школьникам предложили в качестве тренировки сдать экзамен по одному из следующих предметов: физика, химия, биология, обществознание, литература. Физику выбрало больше всего людей, чем литературу, а обществознание — больше, чем химию. Биология оказалась выбрана меньшим количеством людей, чем литература. Обществознание выбрали сдавать меньше людей, чем физику. Выберите утверждения, которые следуют из приведенного текста.

Решение — анализ данных:

1. Физика оказалась наиболее популярным экзаменом;

2. Химию сдавало меньше всего людей;

3. Литературу выбрало меньше людей, чем обществознание;

4. Биология оказалась наименее популярна.

Выберите утверждения, которые следуют из приведенных данных. В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 1.

4. За выходные в кинотеатре комедию посмотрело больше людей, чем триллер, но меньше, чем боевик. Приключенческий фильм оказался более популярен, чем документальный, и более популярен, чем комедия. Других фильмов в кинотеатре не показывали. Выберите утверждения, которые следуют из приведенного текста.

Решение — анализ данных:

1. Документальный фильм посмотрело меньше всего людей;

2. Приключенческий фильм посмотрело больше людей, чем триллер;

3. Боевик наиболее популярен;

4. Боевик посмотрело больше людей, чем документальный фильм.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 2.

5. В столовой на выбор есть порции компота, чая, какао и сока. Порций сока больше, чем какао, и больше, чем компота. Компота меньше, чем чая, но больше, чем какао. Выберите утверждения, которые следуют из приведенного текста.

Решение — анализ данных:

1. Порций чая больше, чем порций сока:

2. Порций сока больше, чем порций какао:

3. Порций какао меньше, чем порций чая:

4. Порций какао меньше, чем порций любого другого напитка.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 234.

Задание № 19

1. Укажите сумму двух натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 45, а разность квадратов равна 144.

Р е ш е н и е. Разложим 45 на простые множители: 45=3·3·5. НОК (15,9) = 45. Составим разность квадратов: 225 – 81 = 144. Искомые числа 15 и 9.

О т в е т: 24.

2. Написано 10-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними числами, делится на 23 или 17. Последняя цифра ровна 1. Найдите первую цифру.

Р е ш е н и е. Выпишем все двузначные числа, которые делятся на 23 и 17: 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92. Начнем составлять из них искомое число с конца, последнее 51. К нему слева припишем число, которое оканчивается 5, то есть 85 и т. д. Получаем 4692346851.

О т в е т: 4.

3. Трехзначное число начинается цифрой 4. Если эту цифру перенести в конец числа, то получится число, составляющее 0,75 исходного. Укажите исходное число.

Р е ш е н и е. Составляем уравнение:

$\frac{3}{4}\cdot\overline{4xy}=\overline{xy4}\Rightarrow\frac{3}{4}(400+10x+y)=100x+10y+4\Rightarrow 296=92{,}5x+9{,}25y$. Подбираем цифры 3 и 2.

О т в е т: 432.

4. Приведите пример двузначного числа, которое в 2 раза больше произведения своих цифр.

О т в е т: 36.

5. Двузначное число не оканчивается нулем. Из него вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили квадрат натурального числа. Сколько таких чисел?

О т в е т: 13.

6. Приведите пример такого двузначного простого числа, обе цифры которого простые и разность между ними является простым числом.

Ответ: 53.

7. Укажите произведение двух натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 360, а разность равна 66.

Ответ: 2160.

8. Приведите пример двузначного числа, которое при делении на цифру его единиц дает в частном 9 и в остатке 4.

Ответ: 67.

9. Представьте число 280 в виде произведения двух чисел с равной суммой цифр. В ответе укажите больший множитель. Если таких разложений на множители несколько, то рассмотрите любое из них.

Ответ: 35.

10. Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 3, 5. Найдите его.

Ответ: 3025.

11. При сложении двух натуральных чисел ученик по ошибке поставил во втором слагаемом лишний нуль в конце числа и получил в сумме 6641 вместо 2411. Определите первоначальные слагаемые. В ответе укажите большее из них.

Ответ: 1941.

Задание № 20

1. Муравей находится на дне колодца глубиной 30 метров. За день он поднимается на 18 метров, а за ночь спускается на 15 метров вниз. Сколько дней понадобится муравью, чтобы подняться до верха со дна колодца?

Решение. Учитывая подъем и спуск, к началу второго дня муравью осталось подняться на 27 м. Аналогично к началу третьего дня — 24 м, четвертого — 21 м, пятого — 18 м. Тогда за пятый день он поднимется на оставшиеся 18 м.

Ответ: 5.

2. Два туриста хотят как можно быстрее одновременно добраться до станции, находящейся от них на расстоянии 30 км. У них имеется только один одноместный велосипед. Скорость передвижения каждого из них составляет 5 км/ч пешком и 15 км/ч на велосипеде. За какое наименьшее время в часах они смогут добраться до станции?

Решение. Сначала один из них час едет на велосипеде, проезжает 15 км и оставляет велосипед. Далее он идет пешком еще 3 часа. Второй в это время сначала идет 3 ч пешком, доходит до велосипеда и едет еще 1 час. Туристы прибывают одновременно за 4 ч.

Ответ: 4.

3. Гусеница ползет по стволу дерева. Ночью она поднимается на 4 м вверх, а днем опускается на 1,5 м вниз. К концу седьмой ночи гусеница достигла вершины дерева. Определите высоту дерева (в метрах).

Ответ: 19.

4. Биологи открыли разновидность амеб, каждая из которых ровно через минуту делится на две. Биолог кладет амебу в пробирку, и ровно через час пробирка оказывается полностью заполненной амебами. Сколько минут потребуется, чтобы вся пробирка заполнилась амебами, если в нее положить не одну, а четыре амебы.

Ответ: 53.

5. Улитка ползет от одного дерева к другому. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 8 м. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 20 м.

Ответ: 5.

6. Круизное судно проходит расстояние между портами Мечта и Счастье за 10,5 суток. Ежедневно в полдень одним и тем же маршрутом как из порта Мечта в порт Счастье, так и из порта Счастье в порт Мечта отправляется по судну. Сколько судов встречает за время плавания из одного порта в другой каждое плывущее судно?

Ответ: 21.

7. В классе 8 отличников, 12 хорошистов и 5 троечников. Отличник может получить за ответ у доски только «5», хорошист — «4» или «5», троечник — «3», «4» или «5». В класс пришел новый учитель. Он не знает никого из учеников. Сколько учеников ему достаточно спросить у доски, чтобы наверняка была поставлена хотя бы одна пятерка?

Ответ: 18.

8. В одной урне находится 100 красных шаров, а в другой — 100 синих. Из первой урны переложили 40 красных шаров во вторую, а затем произвольным образом вынули 40 шаров из второй урны и переложили в первую. Какое наибольшее значение может принимать разность количества синих шаров в первой урне и красных во второй?

Ответ: 0.

9. Бутылка и стакан уравновешиваются кувшином; бутылка уравновешивается стаканом и блюдцем; два кувшина уравновешиваются тремя блюдцами. Сколько потребуется стаканов, чтобы уравновесить бутылку?

Ответ: 5.

10. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 4 часа после встречи велосипедист, движущийся из пункта A, прибыл в пункт B, а через 9 часов после встречи другой велосипедист прибыл в пункт A. Сколько времени потратил на дорогу велосипедист, выехавший из пункта B?

Ответ: 15.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. В классе брюнетов больше, чем рыжих девушек, а брюнеток больше, чем блондинок. Блондинов больше, чем брюнетов, а рыжих юношей меньше,

чем блондинок. Выберите утверждения, которые следуют из приведенного ниже текста:

1. Рыжих меньше, чем темноволосых;

2. Брюнеток больше, чем рыжих юношей;

3. Светловолосых меньше, чем темноволосых;

4. Рыжих девушек меньше, чем блондинов.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 124.

2. Приведите пример трехзначного числа, которое равно произведению пяти натуральных множителей, таких, что любые два из них взаимно просты, а само число делится на 8.

Ответ: 840.

3. Два туриста автостопом добирались одинаковым маршрутом из одного населенного пункта в другой. Первый их них половину всего затраченного им на путешествие времени проехал со скоростью 30 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч. Второй же первую половину всего пути проехал со скоростью 30 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч. Найдите отношение времени, затраченного на путешествие второго из них, ко времени, затраченного первым.

Ответ: 1,125.

Вариант 2

1. Несколько велосипедистов одновременно выехали со старта и по одному и тому же маршруту направились к финишу. Толя приехал позже Васи, но раньше Пети. Вася обогнал лишь двоих. Катя приехала первой. Также в гонке принимали участие Паша и Лиза. Выберите утверждения, которые следуют из приведенных данных:

1. Паша обогнал Васю;

2. Лиза приехала раньше Толи;

3. Лиза обогнала хотя бы четверых;

4. Петя приехал позже Кати.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 124.

2. Назовем автобусный билет счастливым, если сумма цифр его номера делится на 13. Приведите пример номера счастливого билета, для которого следующий билет тоже счастливый.

Ответ: 66999.

3. Средняя заработная плата преподавателей вузов города за месяц составляет 765 денежных единиц, а остальных преподавателей — 690 денежных единиц. Средняя заработная плата всех преподавателей города равна 714 денежных единиц. Определите, какую часть от числа всех преподавателей города составляют преподаватели вузов?

Ответ: 0,32.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ II РАЗДЕЛА

1. Нестандартные методы решений уравнений, неравенств и их систем. Использование свойств функции

1.1. Дробно-рациональные уравнения

Разложение на множители

1. $\dfrac{x}{x^2-6}+\dfrac{x^2}{x-6}+2=0$.

Представим 2 в виде суммы 1+1 и сгруппируем слагаемые:

$$\left(\frac{x}{x^2-6}+1\right)+\left(\frac{x^2}{x-6}+1\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-6}{x^2-6}+\frac{x^2+x-6}{x-6}=0, \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+x-6\right)\left(\frac{1}{x^2-6}+\frac{1}{x-6}\right)=0.$$

1) $\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x^2-6\neq 0, \\ x-6\neq 0; \end{cases}$ $x=2,\ x=-3.$ 2) $\dfrac{x^2+x-12}{\left(x^2-6\right)\left(x-6\right)}=0$; $x=-4,\ x=3.$

О т в е т: – 4; – 3; 2; 3.

Замена переменной

2. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\dfrac{x}{x^2-2x+2}=1$.

Проверка показывает, что число $x=0$ является корнем уравнения.

Пусть $x\neq 0$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x.

Уравнение примет вид: $\dfrac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}}+\dfrac{1}{x-2+\frac{2}{x}}=1$. Обозначим $x+\dfrac{2}{x}=t$, получим $\dfrac{t+3}{t-1}+\dfrac{1}{t-2}=1.$

$$\frac{(t+3)(t-2)+(t-1)-(t-1)(t-2)}{(t-1)(t-2)}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{t^2+t-6+t-1-t^2+3t-2}{(t-1)(t-2)}=0,\; t=\frac{8}{5},\; x+\frac{2}{x}=\frac{8}{5}$$

$5x^2-8x+10=0$.

Дискриминант уравнения меньше нуля, поэтому уравнение не имеет ни одного корня. Итак, ни одно число $x\neq 0$ не является корнем уравнения.

Ответ: 0.

3. $\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^2-2\cdot\frac{x^2-16}{x^2-4}+\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2=0$.

Пусть $a=\frac{x-4}{x-2}$, $b=\frac{x+4}{x+2}$, тогда получаем уравнение $a^2-2ab+b^2=0$.

Пусть $b\neq 0$, $x\neq -4$ ($x=-4$ не является корнем исходного уравнения), тогда разделим обе части уравнения на b^2: $\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\left(\frac{a}{b}\right)+1=0$, откуда $\frac{a}{b}=1$, то есть $\frac{x-4}{x-2}=\frac{x+4}{x+2}$.

Корень уравнения $x=0$.

Ответ: 0.

Применение свойств функций

4. $x^3+3x=\frac{28}{x}$.

На каждом из промежутков $(-\infty;\,0)$ и $(0;+\infty)$ функция $f(x)=x^3+3x$ возрастает (как сумма двух возрастающих функций), а функция $g(x)=\frac{28}{x}$ убывает. Значит, на каждом из этих промежутков уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня. Поскольку $f(2)=g(2)$ получаем, что x = 2 — единственный корень на промежутке $(0;+\infty)$. Поскольку $f(-2)=g(-2)$ получаем, что x = – 2 — единственный корень на промежутке $(-\infty;\,0)$.

Ответ: – 2; 2.

5. $\frac{1}{(x^2+3x)^2+1}+\frac{3}{(x+3)^2+1}+\frac{5}{(x^2+2x-3)^2+1}=9$.

Из неравенств $(x^2+3x)^2+1\ge 1, (x+3)^2+1\ge 1, (x^2+2x-3)^2+1\ge 1$ следует, что каждая из трех дробей левой части не больше

$\dfrac{1}{(x^2+3x)^2+1}\le 1$, $\dfrac{3}{(x+3)^2+1}\le 3$, $\dfrac{5}{(x^2+2x-3)^2+1}\le 5$. Поэтому сумма трех дробей может равняться 9 только в том случае, когда

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(x^2+3x)^2+1}=1,\\ \dfrac{3}{(x+3)^2+1}=3,\\ \dfrac{5}{(x^2+2x-3)^2+1}=5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+3x)^2=0,\\ (x+3)^2=0,\\ (x^2+2x-3)^2=0;\end{cases} \Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: – 3.

6. Найдите корни уравнения $f(x)=1$, если $x\ne 0$ и $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$.

Заменим x на $\dfrac{1}{x}$: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}$. Умножим данное равенство на 2: $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+4f(x)=\dfrac{6}{x}$. Вычтя из полученного равенства исходное, получим: $3f(x)=\dfrac{6}{x}-3x$ или $f(x)=\dfrac{2}{x}-x$.

Теперь осталось решить уравнение: $\dfrac{2}{x}-x=1$, откуда $x^2+x-2=0$, корнями которого являются числа — 2, 1.

Ответ: – 2; 1.

7. Решите уравнение $(2x+1)\sqrt{7+(2x+1)^2}+x\sqrt{x^2+7}=0$.

Введем функцию $f(2x+1)+f(x)=0$. Функция $f(y)$ является нечетной, тогда $f(2x+1)=-f(x)=f(-x)$. Кроме того, $f(y)$ монотонно возрастающая на всей области определения. Из этого следует уравнение: $1+2x=-x$.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}$.

1.2. Иррациональные уравнения

1. $\left(x^2+3x-10\right)\sqrt{2-3x}=3x^2+9x-30$

$$\left(x^2+3x-10\right)\sqrt{2-3x}=3\left(x^2+3x-10\right)\Leftrightarrow\left(x^2+3x-10\right)\left(\sqrt{2-3x}-3\right)=0,$$

1) $\begin{cases}x^2+3x-10=0,\\ 2-3x\geq 0,\end{cases}$ $x=-5$

2) $\sqrt{2-3x}=3,\ 2-3x=9,\ 3x=-7,\ x=-\dfrac{7}{3}.$

Ответ: $-5;\ -\dfrac{7}{3}$.

2. $\left(2x^2-7x+3\right)\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}=3-10x+9x^2-2x^3$

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}=-2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\left(\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}+x-1\right)=0,$$

1) $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2},\\ x=3\end{array}\right.\\ x^3+2x^2-6x-3\geq 0,\end{cases}$ $x=3$

2) $\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}=1-x$

$$\begin{cases}x^3+2x^2-6x-3=(1-x)^2\\ 1-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2-4x-4=0\\ 1-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\ x=-1,\ x=-2$$

Ответ: $-2;\ -1;\ 3$.

3. $\dfrac{x^2-x-\sqrt{x^4-2x^3+3x^2+3x+1}}{5x^3-6x+1}=0$

$$\begin{cases}\sqrt{x^4-2x^3+3x^2+3x+1}=x^2-x,\\ 5x^3-6x+1\neq 0;\end{cases}$$

1) $\sqrt{x^4-2x^3+3x^2+3x+1}=x^2-x$

$$\begin{cases}x^4-2x^3+3x^2+3x+1=\left(x^2-x\right)^2,\\ x^2-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+3x+1=0,\\ x^2-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\ x=-1,\ x=-\frac{1}{2}.$$

2) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ 5x^3-6x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x=-1,\ x=-\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $-1;\ -\dfrac{1}{2}$.

4. $\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}-\sqrt{x+25-10\sqrt{x}}=1$.

$\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{x}-5\right)^2}=1,\ \Leftrightarrow\ \left|\sqrt{x}-2\right|-\left|\sqrt{x}-5\right|=1$.

Пусть $\sqrt{x}=t, t\geq 0$, тогда $|t-2|-|t-5|=1$.

1) $\begin{cases} 0\leq t\leq 2 \\ 2-t+t-5=1 \end{cases}$ — нет решений.

2) $\begin{cases} 2\leq t\leq 5 \\ t-2+t-5=1 \end{cases}$ $t=4,\ \sqrt{x}=4,\ x=16$.

3) $\begin{cases} t\geq 5 \\ t-2-t+5=1 \end{cases}$ — нет решений.

Ответ: 16.

5. $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}=3-5x^2$.

Рассмотрим подкоренные выражения $x^2+4\geq 0, x^2+1\geq 0$ при любых действительных x. Правая часть уравнения $3-5x^2\geq 0$ при $x\in\left[-\sqrt{\dfrac{3}{5}};\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right]$. Тогда получаем $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}\geq\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$, в то время как $3-5x^2\leq 3\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}=3 \\ 3-5x^2=3\end{cases}\Rightarrow x=0.$

Ответ: $x = 0$.

6. $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{1+\sqrt{x}}+1=x$ и рассмотрим функцию $1+\sqrt{x}=f(x)$. Полученное уравнение имеет вид $f(f(x))=x$. Для решения применим следующую теорему: если $f(x)$ — монотонно возрастающая функция, то уравнения $f(x)=x$ и $f(f(x))=x$ равносильны. Введенная функция $1+\sqrt{x}=f(x)$ монотонно возрастает. В силу приведенной теоремы приходим к равносильному уравнению $f(x)=x \Rightarrow 1+\sqrt{x}=x \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x=(x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=x^2-2x+1 \end{cases}$.

Ответ: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

7. Иногда подходящей заменой неизвестного задачу решения иррационального уравнения можно свести к задаче решения тригонометрического уравнения:

1) если в уравнение входит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то можно сделать замену x = arcos t или x = arcsin t;

2) если в уравнение входит радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, то можно сделать замену x = arctg x;

3) если в уравнение входит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то можно сделать замену $x=\dfrac{a}{\sin t}$. Рассмотрим пример $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$. Пусть x = tg$t$, $t\in(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2})$, тогда $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\mathrm{tg}^2+1}=\dfrac{1}{\cos t}\quad\Rightarrow \dfrac{1}{\cos t}-\mathrm{tg}\, t=\dfrac{5}{2}\cos t$, cos$t$ $\neq 0$.

$2-2\sin t=5(1-\sin^2 t)\Rightarrow \sin t=1,\ \sin t=\dfrac{-3}{5}$. Из всех корней этих уравнений промежутку $t\in(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2})$ принадлежит только единственное значение $t=\arcsin(\dfrac{-3}{5})\Rightarrow x=\mathrm{tg}\left(\arcsin(\dfrac{-3}{5})\right)=-\dfrac{3}{4}$.

Ответ: x = – 0,75.

1.3. Тригонометрические уравнения. Отбор корней

1. $\dfrac{(2x-9\pi)(5x-9\pi)(8x-9\pi)}{\sqrt{\cos x}}=0\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4{,}5\pi \\ x=1{,}8\pi \\ x=1{,}125\pi \end{array}\right. \\ \cos x>0 \end{cases}\quad x=1{,}8\pi$.

Ответ: $1{,}8\pi$.

2. $\dfrac{2\sin x+\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0$

$\begin{cases}\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x>0\end{cases}$ $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

3. $\dfrac{\cos 4x}{\sin 4x+1}=0$

$\begin{cases}\cos 4x=0, \\ \sin 4x\neq -1\end{cases}$ $\begin{cases}\cos 4x=0, \\ \sin 4x=1\end{cases}$ $4x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$.

4. $\sqrt{4-5\sin x}=\sqrt{2}\cos x$

$\begin{cases}4-5\sin x=2\cos^2 x, \\ \cos x\geq 0\end{cases}$

1) $4-5\sin x=2\left(1-\sin^2 x\right)$ $\Leftrightarrow$ $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=2, \\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ $\sin x=\dfrac{1}{2}$.

2) $\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x\geq 0\end{cases}$ $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

1.4. Показательные уравнения

1. $\dfrac{11^{x^2-2}}{13^{\sqrt{x}}}=\dfrac{121}{13^{\sqrt{x}}}$. $\begin{cases}11^{x^2-2}=11^2, \\ x\geq 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x=2$.

Ответ: 2.

2. $\dfrac{13^{x^2+3x+2}-11^{x^2+3x+2}}{x+1}=0$.

$$\begin{cases} 13^{x^2+3x+2}=11^{x^2+3x+2}, \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{13}{11}\right)^{x^2+3x+2}=1, \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+2\neq 0, \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: – 2.

3. $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$.

$2^{\sin^2 x}+\dfrac{2}{2^{\sin^2 x}}=3$. Пусть $t=2^{\sin^2 x}, t>0$, тогда $t^2-3t+2=0$ $\left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=2 \end{array}\right.$

$2^{\sin^2 x}=1$, $\sin x=0$, $x=\pi n, n\in Z$

$2^{\sin^2 x}=2$, $\sin x=\pm 1$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi m}{2}, m\in Z$.

4. $3^x+4^x=5^x$.

Воспользуемся тем, что $5^x>0$ при любом значении переменной x, и перейдем к равносильному уравнению $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=1$. Заметим, что $x=2$ — решение этого уравнения.

Покажем, что других решений нет.

Функция $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ убывает как сумма двух убывающих функций, а потому каждое свое значение (в частности, значение 1) она принимает только один раз.

Ответ: 2.

5. $x+4=3^{-x}$.

Легко подобрать корень данного уравнения $x=-1: -1+4=3^1$. Покажем, что других решений нет.

Функция $y=x+4-3^{-x}$ возрастающая, а потому каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Следовательно, у исходного уравнения не может быть больше одного решения.

Ответ: – 1.

З а м е ч а н и е. Когда мы доказываем, что какое-то уравнение не имеет больше корней, за исключением уже найденного, то чаще всего опираемся на свойства монотонности правой и левой частей уравнения. Если $f(x_0)=g(x_0)$, причем функция $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает в области допустимых значений x, то уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет корней, отличных от x_0. В других случаях вывод о числе корней уравнения сделать трудно.

Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Рассмотрим уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}} x$. Если построить графики левой и правой части, ясно, что данное уравнение имеет единственный корень, причем, поскольку функции $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $\log_{\frac{1}{16}} x$ взаимно обратны, соответствующая точка пересечения будет лежать на прямой $y=x$. Однако оказывается, что данное уравнение имеет еще два корня $x=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{4}$ (проверьте!). Дело в том, что графики изображаются нами очень неточно. На самом деле графики пересекаются в трех точках, причем третий корень нельзя записать с помощью элементарных функций.

1.5. Логарифмические уравнения

1. $\log_7(x^2-12)=\log_7 x$. $\begin{cases} x^2-12=x, \\ x>0 \end{cases}$ $x=4$.

О т в е т: 4.

2. $\log_6(3-x)\cdot\log_7(2x^2-13x+21)=0$.

1) $\begin{cases} \log_6(3-x)=0, \\ 2x^2-13x+21>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=1 \\ 2x^2-13x+21>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

2) $\begin{cases} \log_7(2x^2-13x+21)=0, \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-13x+21=1, \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-13x+20=0, \\ x<3 \end{cases}$

$x=2{,}5$.

О т в е т: 2; 2,5.

3. $\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x^3-5x^2+4x}}{\sqrt{4-x}+\log^2{}_{5x+1}\left(x^3-5x^2+4x+1\right)}=1.$

$$\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ -\sqrt{x^3-5x^2+4x}=\log^2{}_{5x+1}\left(x^3-5x^2+4x+1\right) \\ \sqrt{4-x}+\log^2{}_{5x+1}\left(x^3-5x^2+4x+1\right)\ne 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\le 4, \\ x\left(x^2-5x+4\right)=0, \\ \log^2{}_{5x+1}\left(x^3-5x^2+4x+1\right)=0 \\ \sqrt{4-x}\ne -\log^2{}_{5x+1}\left(x^3-5x^2+4x+1\right) \end{cases}$$

1. $x\left(x^2-5x+4\right)=0 \quad x=0, x=4, x=1.$

2. $\log_{5x+1}\left(x^3-5x^2+4x+1\right)=0$.

$$\begin{cases} 5x+1>0, \\ 5x+1\ne 1, \\ x^3-5x^2+4x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{5}, \\ x\ne 0, \\ x\left(x^2-5x+4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

3. Возвращаясь к исходной системе, получаем только $x=1$.

О т в е т: 1.

4. $2^{\log_5 x}+x^{\log_5 2}=7-4^{1/3\log_4 27}$.

Докажем, что $2^{\log_5 x}=x^{\log_5 2}$.

Действительно, $2^{\log_5 x}=2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 5}}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{\log_2 5}}=x^{\log_5 2}$.

Учитывая этот результат, получим $2\cdot 2^{\log_5 x}=7-3$, $2^{\log_5 x}=2$, т. е. $x=5$

О т в е т: 5.

1.6. Системы уравнений

1. Решите систему $\begin{cases} y+\sin x=0, \\ \left(4\sqrt{\sin x}-1\right)\left(5y-3\right)=0 \end{cases}$.

Из второго уравнения системы получаем $\sin x=\dfrac{1}{16}$ или $\begin{cases} \sin x\ge 0, \\ y=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$

Возвращаясь к исходной системе, получаем: $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{16}, \\ y = -\dfrac{1}{16}; \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x = -y, \\ \sin x \geq 0, \\ y = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$

Вторая система решений не имеет.

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin\dfrac{1}{16} + \pi n; -\dfrac{1}{16}\right), n \in Z.$

2. Решите систему: $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9 \\ x - 1 = \left(\sqrt{x} + 1\right)y \end{cases}$.

Выразим из первого уравнения системы x и $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} = 9 - 3y$, $\begin{cases} x = (9 - 3y)^2, \\ y \leq 3, \\ x \geq 0; \end{cases}$

и подставим во второе уравнение исходной системы: $(9 - 3y)^2 - 1 = (9 - 3y + 1)y;$

$(9 - 3y - 1)(9 - 3y + 1) = (9 - 3y + 1)y,$ $9 - 3y + 1 = 0$, $y = \dfrac{10}{3}$ не соответствует условию $y \leq 3,$ или $9 - 3y - 1 = y$, $y = 2$.

При $y = 2$, $\sqrt{x} = 3$ и $x = 9.$

Ответ: $(9; 2)$.

3. Решите систему $\begin{cases} \sqrt{y + \cos^2 x - 1} = -\cos x, \\ y \cdot \sin^2 x - \left(y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0. \end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы: $\begin{cases} \cos x \leq 0, \\ y + \cos^2 x - 1 = \cos^2 x \end{cases}$, $\begin{cases} \cos x \leq 0, \\ y = 1. \end{cases}$

Подставим $y = 1$ во второе уравнение исходной системы: $\sin^2 x - \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

Откуда $\sin x = 1$ или $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ Учитывая, что $\cos x \leq 0$, получаем: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$ $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 1\right), \left(-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k; 1\right), n, k \in Z$.

4. Решите систему $\begin{cases} 2\lg\sqrt{x}+2^y+1=0, \\ \lg x^3+4^y-1=0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x>0 \\ \lg x+2^y+1=0 \\ 3\lg x+4^y-1=0 \end{cases}.$$

Умножим второе уравнение системы на 3 и вычтем из третьего уравнения второе. Получим: $4^y-3\cdot 2^y-4=0$. Тогда $2^y=4$ или $2^y=-1$ — решений не имеет. Если $y=2$, то $\lg x+5=0$ и $x=10^{-5}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{100000};2\right)$.

5. Решите систему $\begin{cases} \cos x=y+\sqrt{3}, \\ \sin x=\sqrt{3}y+2. \end{cases}$

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получим уравнение относительно *y*: $\left(y+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}y+2\right)^2=1$.

$$y^2+2\sqrt{3}y+3+3y^2+4\sqrt{3}y+4=1,\ \ 2y^2+3\sqrt{3}y+3=0\ \ y=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ y=-\sqrt{3}.$$

1. Если $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\begin{cases} \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x=\frac{1}{2}; \end{cases}$ и $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

2. Если $y=-\sqrt{3}$, то $\begin{cases} \cos x=0, \\ \sin x=-1 \end{cases}$ и $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\sqrt{3}\right), n\in Z$.

6. Решите систему $\begin{cases} \left(2^x-2^{2y}\right)\left(4^x-2^{4y}\right)=45, \\ 2^x+4^y=5. \end{cases}$

Упростим первое уравнение системы: $\left(2^x-2^{2y}\right)\left(\left(2^x\right)^2-\left(2^{2y}\right)^2\right)=45$, $\left(2^x-2^{2y}\right)^2\left(2^x+2^{2y}\right)=45$.

Тогда исходная система примет вид: $\begin{cases} \left(2^x - 2^{2y}\right)^2 \cdot 5 = 45, \\ 2^x + 4^y = 5. \end{cases}$

Далее получаем: $\begin{cases} 2^x - 2^{2y} = 3 \\ 2^x + 2^{2y} = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2^x - 2^{2y} = -3 \\ 2^x + 2^{2y} = 5. \end{cases}$

Решая каждую систему методом алгебраического сложения, получаем ответ:

Ответ: $(2;\ 0),(0;\ 1)$.

7. Решите систему $\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2-6x-23}} = 6 - \sqrt{x^2 - 6x - 23}, \\ \log_3 x = y. \end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение системы.

Пусть $t = \sqrt{x^2 - 6x - 23}$, $t > 0$, тогда $2^t = 6 - t$.

Это уравнение имеет единственный корень $t = 2$, так как функция, стоящая в левой части уравнения, $y = 2^t$ — возрастающая, а функция $y = 6 - t$ — убывающая.

Значит, если у уравнения и есть корень, то только один.

$\sqrt{x^2 - 6x - 23} = 2$, тогда $x^2 - 6x - 27 = 0$, $x = 9$ или $x = -3$.

$x = -3$, не соответствует условию $x > 0$.

Значит, $x = 9, y = \log_3 9 = 2$.

Ответ: $(9;\ 2)$.

8. Решите систему $\begin{cases} 2x^2 + 2x - \cos 2y - \sin y = 12, \\ x - \sin y = 1. \end{cases}$

$\sin y = x - 1.$

Так как $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$, то $\cos 2y = 1 - 2(x-1)^2$.

Подставим полученные нами выражения в первое уравнение исходной системы:

$2x^2 + 2x - 1 + 2(x-1)^2 - x + 1 = 12$, $4x^2 - 3x - 10 = 0$, $x = 2$ или $x = -\dfrac{5}{4}$.

$$\begin{cases} x=2, \\ \sin y=1; \end{cases} \left(2;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \quad \begin{cases} x=-\dfrac{5}{4}, \\ \sin y=-\dfrac{9}{4} \end{cases}$$ — нет решений.

Ответ: $\left(2;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Решите уравнение: $\sin x = x^2+2x+2$.

2. Решите уравнение: $\sqrt{9+2\sin x}+4\sqrt{\sin x}=\cos\frac{x}{2}+2$.

3. Решите уравнение: $3^{\sin x}=4-\cos^2\left(\frac{4}{3}x\right)$.

4. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+5x-6}+\log_2\sqrt{x^2-2x+5}=1$.

5. Найдите $D(y)$: $y=\sqrt{x^2-6x+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, $y=\sqrt{|x-2|(x-14)}$, $y=\sqrt{x|x-1|-2}$.

6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3+y^3=\dfrac{7}{2}x, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите уравнение: $\cos x = x^2-2x+2$.

2. Решите уравнение: $\left(\sqrt{4+\sin x}-\sqrt{\sin x}\right)\cos\frac{x}{2}=2$.

3. Решите уравнение: $2^{|\cos 2x|}=\dfrac{\sin 3x-\cos 3x}{\sqrt{2}}$.

4. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+2x-8}+\log_3\sqrt{x^2-4x+13}=1$.

5. Найдите $D(y)$: $y=\sqrt{2-x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2}}$, $y=\sqrt{(x-12)(x-10)^2}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{|2x-3|-x^2}}$.

6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3+y^3=9y, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

2. Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы

В основу этого раздела положен сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы под редакцией С. А. Шестакова.

Ниже приведены самостоятельные работы на параметры для шести функций: квадратичной, рациональной, иррациональной и элементарных функций (тригонометрические, показательные и логарифмические). Специальной теории здесь не предполагается, так как задачи совершенно стандартны. Выполнение этих работ является необходимой подготовкой к выполнению заданий на параметры в ЕГЭ.

Многочлены

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решения уравнения $(x-6a)^2+(x-2a)^2=128$ симметричны относительно точки $x=12$.

2. Для каждого значения параметра *a* найдите число решений уравнения $9(3x-1)a^2-(21x-19)a+2(x-1)=0$.

3. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(20a-3)x+100a^2-30a=0$ в 6 раз больше, чем его меньший корень.

4. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.

5. Определите, при каких значениях параметра *a* неравенство $(x-a)(a-2x+1)\le 0$ верно для всех $x\in[-2;3]$.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решения уравнения $(x-2a)^2+(x-4a)^2=242$ симметричны относительно точки $x=-3$.

2. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $2(4x-1)a^2-(14x-11)a+5(x-1)=0$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(8a-7)x+16a^2-28a=0$ в 10 раз больше, чем его меньший корень.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $(a-x)(x-3a+6)\le 0$ верно для всех $x\in[1;\,4]$.

Рациональные функции

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=2a,\\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{12}{y}=1-3a\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

2. При каждом значении параметра a решите неравенство $\dfrac{3}{ax+a}>\dfrac{1}{5}$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решением неравенства $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-(a-4)x-4a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4a,\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1-a\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

2. При каждом значении параметра a решите неравенство $\dfrac{1}{ax-a} > \dfrac{3}{4}$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решением неравенства $\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-(a-1)x-a} < 0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Иррациональные функции

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5ax+3a} = 5x+3$ имеет ровно одно решение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{4a^2-x^2} \geq |x-2a|$ имеет единственное решение.

3. Решите при всех значениях параметра $\sqrt{x^2+ax} = x-2a$.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3ax+5a} = 3x+5$ имеет ровно одно решение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{3a^2-x^2} \geq |x+a|$ имеет единственное решение.

3. Решите при всех значениях параметра $\sqrt{x^2-ax} = x+2a$.

Тригонометрические функции

Вариант 1

1. При каких значениях параметра a уравнение $(15\sin x - a - 5)(15\sin x + 2a - 5) = 0$ имеет ровно два решения на отрезке $[0; 2\pi]$?

2. Для всех значений параметра a решите уравнение: $\sin 3x = a\sin x$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases} 24\cos^2 x + 11\cos^2 y = 10a - 17 \\ 33\cos^2 x + 8\cos^2 y = 28a - 59. \end{cases}$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых прямая $y = a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 7}{3\operatorname{tg} x + 1}$.

Вариант 2

1. При каких значениях параметра a уравнение $(11\sin x - 3a - 5)(11\sin x + 4a + 3) = 0$ имеет ровно два решения на отрезке $[0; 2\pi]$?

2. Для всех значений параметра a решите уравнение: $\cos 3x = a\cos x$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases} 21\cos^2 x + 11\cos^2 y = 9a - 8, \\ 33\cos^2 x + 7\cos^2 y = 45a - 64. \end{cases}$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых прямая $y = a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 45}{7\operatorname{tg} x + 2}$.

Показательная функция

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^x + (5 \cdot a^2 + a + 4) \cdot 5^x - a - 2 = 0$ имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $9^x - (7a - 1) \cdot 3^x + 12a^2 - a - 6 \le 0$ имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^{49x^2 - 70x + 26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$ имеет решения. Найдите эти решения.

4. При каком значении a уравнение $\sqrt{2^{a+2+2x}} - 2^{2x} = y^2 - 2y\sqrt{a} + 11$ имеет единственное решение.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $81^x+(4\cdot a^2+3\cdot a+4)\cdot 9^x-2\cdot a+3=0$ имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $4^x-(5a-1)\cdot 2^x+6a^2-a-2\le 0$ имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $14^{25x^2-10x+2}=\cos 10\pi x-36a^2-60a-12$ имеет решения. Найдите эти решения.

4. При каком значении *a* уравнение $2^{2a+3+x}-4^{x+1}=4y^2-8y\sqrt{a}+9$ имеет единственное решение.

Логарифмическая функция

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра *b*, при каждом из которых уравнение $\log_3\dfrac{3}{14x^2+3}=x^2+(5b-1)^2$ имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\log_{11}^2 x-(10a+23)\log_{11} x+25a^2+115a+132=0$ имеет два различных корня, равноудаленных от точки $x=66$.

3. Для всех значений параметра *a* решите неравенство: $x^{\log_a x}>a^3x^2$.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра *b*, при каждом из которых уравнение $\log_9\dfrac{9}{10x^2+9}=x^2+(13b-12)^2$ имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\log_4^2 x-(6a+23)\log_4 x+9a^2+69a+132=0$ имеет два различных корня, равноудаленных от точки $x=40$.

3. Для всех значений параметра *a* решите неравенство: $x^{\log_a x}<a^2x$.

3. Задачи с экономическим содержанием

Данный раздел включен в пособие по причине того, что в ЕГЭ профильного уровня есть сложная текстовая задача. Причем выбранная тема этих задач скорее не экономическая, а сугубо банковская. Возможно через какое-то время это не будет так актуально, как в настоящий момент. Однако умение решать подобные задания необходимо. Ниже приведены критерии оценки задач подобного вида.

Критерии оценки:

«3» — обоснованно получен верный ответ.

«2» — верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки;

— верно построена и исследована математическая модель, получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно.

«1» — верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено.

«0» — решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Максимальный балл — «3».

Увеличить число S на $p\%$ $S+\frac{p}{100}\cdot S=S\left(1+\frac{p}{100}\right).$

Уменьшить число S на $p\%$ $S-\frac{p}{100}\cdot S=S\left(1-\frac{p}{100}\right).$

Число A увеличили на 20 %, получили 1,2 A.

Число A уменьшили на 20 %, получили 0,8 A.

На сколько % число A больше числа B?

Ответ: $\frac{a-b}{b}\cdot 100\%$ $(A>B)$.

Когда человек своевременно не оплачивает квартиру, на него возлагается штраф, называемый пеня. Пусть S — ежемесячная оплата квартиры, p % — пеня за каждый день просрочки и n — число просроченных дней. S_n — сумма, которую должен заплатить человек через n-дней просрочки.

Тогда за n дней просрочки пеня составит pn % от S, или $\frac{pn}{100}\cdot S$, а всего придется заплатить $\frac{pn}{100}\cdot S+S=S\cdot\left(1+\frac{pn}{100}\right)$.

Таким образом, $S_n=\left(1+\frac{pn}{100}\right)\cdot S$ — формула простого процентного роста.

В банках России для некоторых видов вкладов принята следующая система выплаты доходов: за первый год нахождения внесенной суммы на счете доход составляет, например, p (%). Если вкладчик не забрал первоначальную сумму и доход, то в конце следующего года p (%) начисляются на эту сумму. При такой системе назначаются проценты на проценты. Их обычно называют сложные проценты. Пусть S — внесенная первоначально сумма. Банк начисляет доход в размере p (%) годовых, а через n лет сумма к выплате станет равной S_n:

через год $S_1=S+\frac{p}{100}S=S\left(1+\frac{p}{100}\right)$;

через два года $S_2=S_1+\frac{p}{100}S_1=S_1\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Аналогично $S_n=S\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ — формула сложного процентного роста.

Задача 1. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 %. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение. Пусть S — первоначальная сумма, p — банковский процент. Тогда через год клиент должен получить $S(1+\frac{p}{100})$.

Так как четверть суммы им была снята, то осталось $\frac{3}{4}S(1+\frac{p}{100})$.

Банк увеличил процент годовых на 40 %, поэтому еще через год клиент должен получить $\frac{3}{4}S(1+\frac{p}{100})\cdot(1+\frac{p+40}{100})$. Эта сумма превысила первоначальный вклад в 1,44 раза: $\frac{3}{4}S\,(1+\frac{p}{100})\cdot(1+\frac{p+40}{100})=1{,}44\cdot S$.

Решая уравнение, получаем $1+\frac{p}{100}=1{,}2$.

Ответ: 60 %.

Задача 2. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 8 420 000 рублей в кредит под 10,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10,5 %), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Сергей выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение. Пусть сумма кредита S, а годовые составляют $a\,\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b=1+0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1=Sb-X$. После второй выплаты сумма долга составит $S_2=S_1b-X=(Sb-X)\,b-X=Sb^2-(1+b)X$.

По условию двумя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2-(1+b)X=0$. Откуда $X=\frac{Sb^2}{b+1}$. При $S=8420000$ и $a=10{,}5$ получаем: $b=1{,}105$ и $X=\frac{8420000\cdot 1{,}221025}{2{,}105}=4884100$ (рублей).

Ответ: 4 884 100.

Задача 3. 31 декабря 2014 года Антон взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Антон переводит очередной транш. Антон выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 510 тыс. рублей, во второй 649 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Антону?

Р е ш е н и е. Пусть сумма кредита S, а годовые составляют $a\,\%$, первая выплата — X, а вторая — Y. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит $S_2 = S_1 b - Y = (Sb - X)b - Y = Sb^2 - bX - Y$. По условию двумя выплатами Антон должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - bX - Y = 0$. Откуда $D = X^2 + 4SY = 10^4 \cdot 169^2$. Значит, $b = \dfrac{X + \sqrt{D}}{2S} = \dfrac{10^4 \cdot 51 + 10^4 \cdot 169}{2 \cdot 10^4 \cdot 100} = 1{,}1$. Откуда $a = (b - 1) \cdot 100 = 10$.

О т в е т: 10.

Задача 4. Матвей хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет Матвей может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тыс. рублей?

Р е ш е н и е. Пусть сумма кредита S, а годовые составляют $a\,\%$. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. Составим таблицу выплат.

Год	**Долг банку, руб**	**Остаток после транша, руб**
0	1 400 000	—
1	1 540 000	1 220 000
2	1 342 000	1 022 000
3	1 124 200	804 200
4	884 620	564 620
5	621 082	301 082
6	331 190,2	11 190,2
7	12 309,22	0

Значит, Матвей погасит кредит за 7 лет.

Задача 5. 31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Тимофей переводит в банк платеж. Весь долг Тимофей выплатил за три равных платежа. На сколько рублей меньше он отдал бы банку, если бы смог выплатить долг за два равных платежа?

Решение. Пусть сумма кредита *S*, а годовые составляют $a\,\%$. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит $S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1+b)X$. После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна $S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}X$.

По условию тремя выплатами Тимофей погасил кредит полностью, поэтому $Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X = 0$. Откуда $X = \frac{Sb^3(b-1)}{b^3 - 1}$.

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Тимофей гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год он должен был выплачивать $Y = \frac{Sb^2}{b+1}$ рублей. Значит, он отдал банку на $3X - 2Y$ рублей больше.

При $S = 7\,007\,000$ и $a = 20$ получаем: $b = 1{,}2$ и

$$X = \frac{7\,007\,000 \cdot 1{,}728 \cdot 0{,}2}{0{,}728} = 3\,326\,400 \text{ (рублей)}.$$

$$Y = \frac{7\,007\,000 \cdot 1{,}44}{0{,}2} = 4\,586\,400 \text{ (рублей)}.$$

Значит, $3X - 2Y = 806\,400$ (рублей).

Ответ: 806 400.

Задача 6. 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 % на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Решение. Минимизировать время выплат можно, только максимизировав сами выплаты. Решим задачу в общем виде. Пусть S — сумма (тыс. руб.) кредита; S_n — задолженность в n-й месяц; s_n — выплата в n-й месяц, $s_n = s$; q — коэффициент ежемесячного повышения, $q > 1$. Тогда

$$S_1 = qS - s,$$

$$S_2 = qS_1 - s = q(qS - s) - s = q^2 S - (1+q)s,$$

$$S_3 = qS_2 - s = q^3 S - \left(1 + q + q^2\right)s \dots$$

После предпоследней выплаты останется $S_{N-1} \le s$ и тогда в последний, N-й раз, кредит будет погашен. Значит,

$$S_{N-1} = q^{N-1}S - \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{N-2}\right)s = q^{N-1}S - \frac{q^{N-1} - 1}{q-1}s \le s.$$

Относительно $x = q^{N-1}$ получаем неравенство:

$$(q-1)xS - (x-1)s \le (q-1)s,\ x\big((q-1)S - s\big) \le (q-2)s.$$

По условию $S = 900$, $s = 300$, $q = 1{,}01$, то есть

$$x \cdot (-291) \le -297,\ x = 1{,}01^{N-1} \ge \frac{297}{291} = 1{,}0206...$$

Так как $1{,}01^2 = 1{,}0201 < 1{,}0206...$, $1{,}01^3 = 1{,}030301 > 1{,}0206...$, то $N - 1 = 3$, $N = 4$.

Ответ: 4.

Задача 7. 15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев.

Условия возврата таковы:

› 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

› со 2-го числа по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

› 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r %.

Решение.

a рублей — кредит под r % на 39 месяцев;

1 месяц $a+a\dfrac{r}{100}-a\dfrac{r}{100}-\dfrac{1}{39}a=\dfrac{38}{39}a$;

2 месяц $\dfrac{38}{39}a+\dfrac{38}{39}a\dfrac{r}{100}-\dfrac{38}{39}a\dfrac{r}{100}-\dfrac{1}{39}a=\dfrac{37}{39}a$;

3 месяц $\dfrac{37}{39}a+\dfrac{37}{39}a\dfrac{r}{100}-\dfrac{37}{39}a\dfrac{r}{100}-\dfrac{1}{39}a=\dfrac{36}{39}a$;

$$a+\left(a\frac{r}{100}+\frac{38}{39}a\frac{r}{100}+\frac{37}{39}a\frac{r}{100}+...+\frac{1}{39}a\frac{r}{100}\right)=1{,}2a;$$

$$\frac{r}{100}\left(1+\frac{38}{39}+\frac{37}{39}+...+\frac{1}{39}\right)=0{,}2;$$

$r=1$ %.

Ответ: 1.

Задача 8. Первичная информация разделяется по серверам № 1 и 2 и обрабатывается на них. С сервера № 1 при объеме t^2 гигабайт входящей в него информации выходит $20t$, а с сервера № 2 при объеме t^2 гигабайт входящей в него информации выходит $21t$ гигабайт обработанной информации; $25 \le t \le 55$. Каков наибольший общий объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гб?

Решение. У данной задачи несколько решений. Одно из них с использованием производных, приведено ниже.

Другое решение с использованием тригонометрической замены: $x=r\sin\alpha,\quad y=r\cos\alpha$.

Пусть на сервере № 1 обрабатывается x^2, а на сервере № 2 обрабатывается y^2 Гб всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гб информации. Выразим y через $x : y = \sqrt{3364 - x^2}$.

Требуется найти наибольшее значение функции:

$f(x) = 20x + 21\sqrt{3364 - x^2}$. $f'(x) = 20 - \dfrac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}}$, $f'(x) = 0$, $400 = \dfrac{441x^2}{3364 - x^2}$,

$x^2 = \dfrac{400 \cdot 3364}{841} = 1600$, $x = 40$.

Поэтому $x = 40$ единственная критическая точка и $y = \sqrt{3364 - 1600} = 42$. Условия $25 \le x \le 55$, $25 \le y \le 55$ выполнены. Если $x < 40$, то $x^2 < 1600$, $400 > \dfrac{441x^2}{3364 - x^2}$ и $f'(x) > 0$.

Если $x > 40$, то $f'(x) < 0$. Поэтому $x = 40$ есть точка максимума. Значит, $f_{\text{наиб}} = f(40) = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682$.

Ответ: 1682.

Задача 9. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции равно $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод построят, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении строительство окупится не более чем за три года?

Решение. Прибыль $f(x) = px - (0{,}5x^2 + 2x + 6) = -0{,}5x^2 + (p - 2)x - 6$

$$x_0 = \frac{2 - p}{-1} = p - 2$$

$$f_0 = f(x_0) = f(p - 2)$$

$$f(p - 2) = -\frac{1}{2}(p - 2)^2 + (p - 2)^2 - 6 = \frac{(p - 2)^2}{2} - 6.$$

Известно, что завод окупится за три года: $78 \div 3 = 26$

$$\frac{(p-2)^2}{2} - 6 \geq 26$$

$$(p-2)^2 \geq 64$$

$p \geq 10$.

Ответ: 10.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ III РАЗДЕЛА

1. Производная и пределы

1.1. Определение предела и производной в курсе математического анализа

В курсе математического анализа часто встречаются задания на исследование функций, элементом которых является зависимость $y = \sqrt{x}$. Например, задание в экзамене для общеобразовательного класса из сборника: найдите значение производной функции $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ при $x = 16$. Или задание в экзаменах для физико-математического класса: найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}$ на промежутке [5; 8], или задание: исследовать функцию $f(x) = x^2 - 6x + 8\sqrt{x}$ на монотонность. Некоторые из перечисленных заданий уже встречались на выпускных экзаменах в более ранние годы. В ЕГЭ подобные задания редки. Тем не менее теоретические тонкости при решении подобных заданий должны знать учащиеся классов с углубленным изучением математики.

При решении этих заданий возникают проблемы, связанные с производной. Большинство учащихся рассматривают производную как обычную функцию. Между тем это не так. При таком подходе производная данной функции существует только на открытом промежутке и не может принимать бесконечные значения, что соответствует содержанию учебников для общеобразовательной школы. В работах учащихся можно встретить утверждение, что непрерывная функция $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ (производная $f'(x) = 3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$) дифференцируема на луче $[0, +\infty)$, а в это время у других учащихся встречаются категоричные высказывания о несуществовании производной функции $f(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}$ на границах промежутка [5; 8], то есть даже не в точке $x = 4$. У одних говорится о существовании производной на отрезке, другие в процессе решения исправляли отрезки на интервалы. Возникшая путаница говорит о проблемах, большей частью связанных с изложением (вернее его отсутствием) этого материала в учебниках по математическому анализу для старшей школы.

В связи с этим обратим внимание на некоторые важные понятия.

Во-первых, существует понятие дифференцируемости непрерывной функции на отрезке, понимаемой как существование односторонних производных на концах отрезка. Между прочим данное замечание в учебнике Н. Я. Виленкина [6; 7] написано мелким шрифтом и вполне может быть пропущено при чтении.

Во-вторых, получение бесконечной производной также говорит о существование производной. Ничего необычного в этом нет, так как производная определяется как предел разностного отношения и несобственные числа $+\infty$, $-\infty$ также называются производной, обозначаются как обычно и имеют вполне определенный геометрический смысл. Записи $y' = \infty$, $y' = -\infty$ говорят о том, что в точке возможна вертикальная касательная и перегиб графика, либо односторонняя вертикальная касательная, либо это точка возврата.

Наконец, в-третьих, к этому списку особых случаев относится и само понятие односторонней производной.

Первый раз понятие «односторонний предел» появляется при определении непрерывности функции в точке. Но вычисление односторонних пределов функций подразумевает в дальнейшем вычисление односторонних производных как пределов разностных отношений, что, в свою очередь, предполагает наличие односторонних касательных. В учебнике же касательные прямые определяются через касательные лучи (!), а особые случаи расположения касательных лучей (результат различия односторонних производных) рассмотрены в виде примечаний и мелким шрифтом.

Таким образом, в последнем задании имеем непрерывную, дифференцируемую на отрезке [5; 8] функцию $f(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}$, а при наличии бесконечной односторонней производной $f'(4+0)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=+\infty$, дифференцируемую на луче [4; + ∞).

К сожалению, как отмечено выше, тонкие вопросы теории математического анализа в математическом классе не удается полностью изложить в силу ряда причин, в частности некоторой половинчатости данного материала в учебнике для углубленного изучения математики [6; 7]. Возможно, такие вопросы должны стать предметом рассмотрения на уроке по теме о геометрическом смысле производной с привлечением классических учебников математического анализа, поскольку более глубокое изучение данной темы позволило бы не только закрыть некоторые вопросы, но и сделать задания более интересными. Например, задание для математического класса: существует ли касательная к графику функции $y=-x^2+x+3|x|$, имеющая с графиком ровно две общие точки. В результате получаются три ответа, а не один, как предусматривалось: $y=x+\dfrac{9}{4}$, $y=4x$, $y=-2x$ — касательная и две односторонние касательные соответственно.

Таким образом, темой данного параграфа является изложение некоторых вопросов математического анализа в рамках требований к математической подготовке учащихся классов с углубленным изучением математики. Для этого подробно рассмотрим понятие предела, так как именно оно пронизывает весь курс математического анализа. При изложении использованы учебники как для общеобразовательной школы, так и для школ с углубленным изучением математики.

Впервые определение понятия предела появляется у английского математика Джона Валлиса (1616—1703) в «Арифметике бесконечных величин» (1655). Но никому из математиков XVIII века не приходило в голову обосновать интегральное и дифференциальное исчисление через понятие предела. И только в XIX веке благодаря Огюстену Луи Коши (1789—1857) теория пределов легла в основу строгого построения всего курса математического анализа

(«Алгебраический анализ», 1821). Следует все-таки отличать школьный курс математического анализа от вузовского. Строгие определения на ε-δ-языке и множество теорем в школьном курсе нецелесообразны для большинства учащихся.

1.2. Производная функции

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$ (предел разностного отношения): $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. В конкретной точке это выглядит так $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

По аналогии с определением производной функции в точке определяются и односторонние производные функции, которым соответствуют односторонние касательные. Если к этой точке мы стремимся справа, то производная имеет вид $f'(a+0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, если слева, то $f'(a-0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$. Если выполняется равенство $f'(a+0) = f'(a-0)$, то функция дифференцируема в точке, и в этом случае $f'(a+0) = f'(a-0) = f'(a)$. Если какая-либо из производных не имеет смысла (например, на границах области определения функции), то $f'(a-0) = f'(a)$ или $f'(a+0) = f'(a)$.

Пример. Дана функция: $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \le 1; \\ ax + b, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

При каких значениях a и b функция f будет дифференцируемой в точке $x = 1$?

Обязательным условием дифференцируемости функции является ее непрерывность. Для этого необходимо выполнение равенств:

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1)$, то есть $a + b = 1$. Для дифференцируемости функции в точке требуется существование предела $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Для существования этого предела необходимо и достаточно существование и равенство односторонних пределов $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{ax+b-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)}{x-1} = a$. Следовательно: $a = 2$ и $b = -1$.

Из определения производной следует, что производная функции $y(x) = \sqrt[3]{x}$, с одной стороны, равна: $y'(x) = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$, а с другой, по определению $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x\cdot(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}$. Отсюда при $x = 0$ получаем $f'(0+0) = f'(0-0) = f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty$. Аналогично для функции $y(x) = \sqrt[3]{x^2}$, с одной стороны, производная равна: $y'(x) = \dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$, а с другой, по определению $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^4}+\sqrt[3]{x^2\cdot(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)}$.

Отсюда при $x = 0$ получаем $f'(0+0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)}} = +\infty$ и $f'(0-0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)}} = -\infty$, а в точке $x = 0$ производной не существует.

Данные примеры отличаются от случаев, когда у непрерывных функций нет даже односторонних производных. Классический вариант такой функции, у которой нет односторонней производной в нуле: $y = \begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$.

Действительно, $f'(0\pm 0) = \lim\limits_{\Delta x\to \pm 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to \pm 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to \pm 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$, которого не существует.

Из анализа производных подобных функций следует характер особых точек графика функции: (для примера взята точка $x = 0$) точек возврата, точек с вертикальной касательной и угловой точки соответственно (рис. 17).

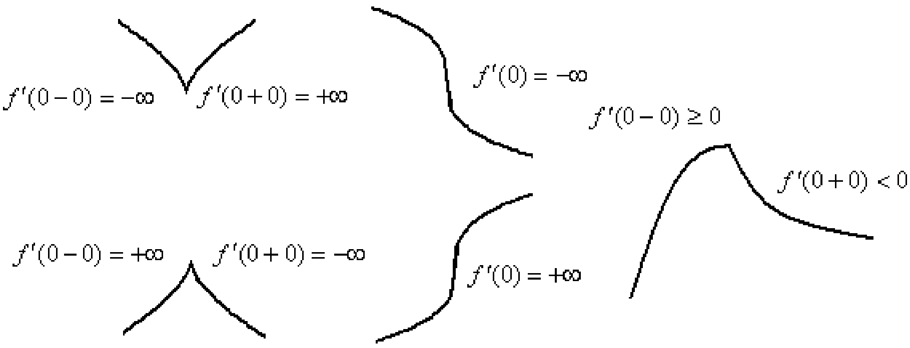

Рис. 17

В точках возврата правая и левая касательные совпадают, и график имеет одну вертикальную касательную.

1.3. Монотонность функции

При определении промежутков монотонности функций пользуются теоремами, которые записаны ниже в порядке возрастания общности.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и ее производная положительна для всех $x \in (a;b)$, то функция возрастает на $(a; b)$.

Далее в учебнике говорится, что можно доказать, что если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ и ее производная положительна на интервале $(a; b)$, то функция возрастает на $[a; b]$.

Если внутри отрезка есть стационарные точки, то промежуток разбивается на несколько отрезков, в каждом из которых выполняются условия теоремы. Учитывая примечание, получаем, что функция возрастает на всем отрезке.

В итоге получаем теорему в более общей формулировке.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$ и ее производная внутри промежутка неотрицательна и равна нулю лишь в конечном числе точек, то функция возрастает на $[a; b]$.

Если добавить понятие дифференцируемости на отрезке $[a;\ b]$, то есть существование односторонних производных на границах отрезка, то теорему можно сформулировать для отрезка.

Наконец, учитывая, что у функции возможны угловые точки, теорема может формулироваться следующим образом.

Теорема. Функция возрастает на промежутке, если производная этой функции положительна всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, в которых функция непрерывна.

Пример. Построить и исследовать график функции $y(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8} - 2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 2$:

- Область определения функции: $D(y) = R$;
- функция четная;
- асимптот нет;
- производная функции равна $y'(x) = \dfrac{2x}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2-8)^2}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}}\right)$, $y'(x) = 0$,

$x = \pm 4 \cdot \sqrt{\dfrac{4 \pm \sqrt{2}}{7}}$ — стационарные точки;

- подозрительные точки на экстремум:

$x = 0$, $x = 2\sqrt{2}$, $x = -2\sqrt{2}$;

- $\lim\limits_{x \to 0-0} y'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} y'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2\sqrt{2}} y'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2\sqrt{2}} y'(x) = -\infty$.

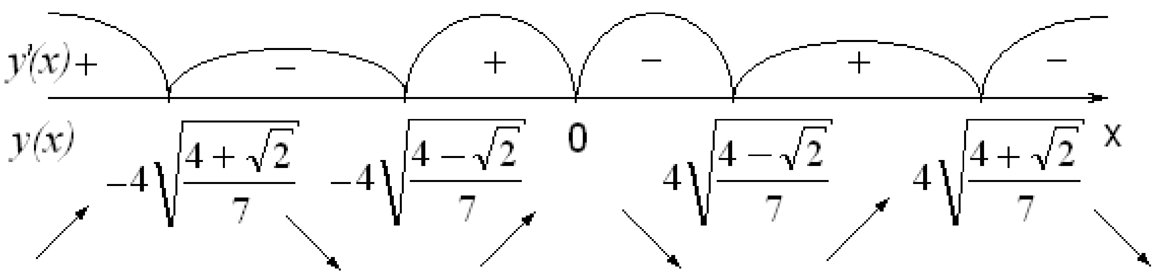

Рис.18

Таким образом, имеем пять точек экстремума и соответствующие экстремумы:

$x \approx -3{,}5179$ — точка максимума, $y \approx -0{,}99$ — максимум функции;

$x \approx -2{,}4311$ — точка минимума, $y \approx -2{,}89$ — минимум функции;

$x = 0$ — точка максимума, $y = 0$ — максимум функции;

$x \approx 2{,}4311$ — точка минимума, $y \approx -2{,}89$ — минимум функции;

$x \approx 3{,}5179$ — точка максимума, $y \approx -0{,}99$ — максимум функции.

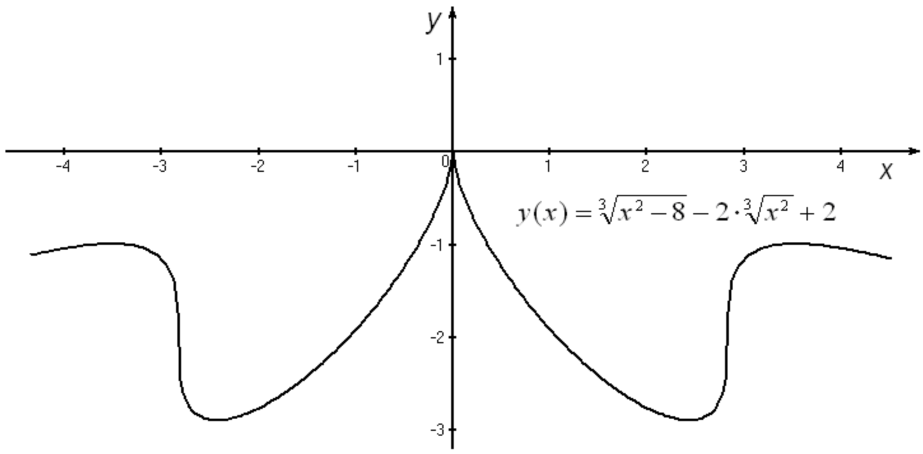

Рис. 19

На рисунке 19 приведен график функции $y(x)=\sqrt[3]{x^2-8}-2\cdot\sqrt[3]{x^2}+2$.

1.4. Вопросы математического анализа в задачах ЕГЭ

В данном разделе в первую очередь рассмотрены задания из первой части ЕГЭ.

Исследование функций с помощью производной

Выделим основные группы задач:

— исследование функции на экстремумы;

— исследование функции на возрастание/убывание;

— исследование функции на наибольшее и наименьшее значения (в том числе на отрезке);

— исследование графика функции с помощью графика ее производной.

В первых трех типах задач функция задана аналитически, для решения задачи нужно найти производную, ее нули и промежутки знакопостоянства. В последнем типе задач необходимо сделать выводы о промежутках возрастания и убывания, экстремумах функции, ее наименьших и наибольших значениях, исследуя заданный график производной этой функции.

Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определению промежутков знакопостоянства ее производной. Напомним соответствующие утверждения в упрощенном варианте.

Достаточный признак возрастания функции: если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале.

Достаточный признак убывания функции: если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале.

Решение задач на нахождение точек максимума и минимума (точек экстремума) функции основывается на следующих утверждениях.

Признак максимума: если функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a;b)$, $f'(x) > 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;b)$, то x_0 — точка максимума функции f (упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума).

Признак минимума: если функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a;b)$, $f'(x) < 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;b)$, то x_0 — точка минимума функции f (упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума).

Обратим внимание на то, что условие непрерывности в точке x_0 является существенным. Если это условие не выполнено, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже если функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ -1, x = 0 \end{cases}$. Хотя эта функция определена в точке $x = 0$ и в этой точке производная $f'(x) = 2x$ меняет знак с минуса на плюс, эта точка не является точкой минимума.

Обратим внимание на следующий факт: точками максимума и минимума являются лишь точки области определения функции, и ординат эти точки иметь, разумеется, не могут. Тем не менее, очень часто называют, например, точку минимума функции $y = x^2 + 3$, не «точка 0», а «точка $(0; 3)$», подразумевая точку графика функции. Такое утверждение является ошибочным.

Значение функции в точке минимума называется минимумом функции, а значение в точке максимума — максимумом функции.

Обратим внимание на то, что если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, о функции $y = \operatorname{tg} x$ очень часто приводятся следующие ошибочные утверждения: «функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на всей области определения», «функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$». Если бы эти утверждения были верны, то из $2 > 1$ следовало бы, что $\operatorname{tg} 2 > \operatorname{tg} 1$, а это не так. Аналогично обстоит дело с функцией $y = \frac{1}{x}$. Вывод о том, что она убывает на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ является математической ошибкой. На самом деле, из того что $2 > -3$ не следует, что $\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$. Следовательно, функция $y = \frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Лучше перечислять промежутки возрастания, используя точку, точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке, нужно вычислить ее значения в точках экстремума, принадлежащих отрезку, и значения на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из вычисленных значений и будет наибольшим (соответственно — наименьшим) значением функции на отрезке.

Обратим внимание на то, что для функции, непрерывной на интервале, аналогичное утверждение справедливо далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $(0; 1)$. На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно $y(x_0) = y_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1 \in (x_0; 1)$ значение функции окажется больше чем y_0, поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ является возрастающей.

Рассмотрим еще одну типичную ситуацию. При исследовании на монотонность непрерывной и дифференцируемой на R функции $y = 3x^4 - 4x^3$ в ответе нужно указать только два промежутка монотонности: $(-\infty; 1]$, на котором функция убывает, и $[1; +\infty)$ — промежуток возрастания. Точка 0, хотя и является критической, не будет концом промежутка монотонности, так как производная в этой точке не меняет знак.

Напротив, при исследовании функции $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ в ответе должны быть указаны три промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1]$ — промежуток убывания.

Значение в точке минимума функции, принадлежащей отрезку, вовсе не обязательно является наименьшим значением функции на этом отрезке. Например, для функции $y = x^3 - 3x$ наименьшим значением на отрезке $[-5; 2]$ является вовсе не $y(-1) = 2$ (значение в точке минимума), а $y(-5) = -110$. Разумеется, аналогичное замечание справедливо и для точки максимума.

Для решения такой задачи может оказаться полезным следующее свойство непрерывных функций: «если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке». Аналогичное утверждение справедливо для точки максимума и наибольшего значения функции. Например, если функция $y = f(x)$ непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на промежутке $(a; b)$ единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x_0)$.

Иногда при решении задач на исследование функций оказывается, что на данном промежутке точек экстремума нет. Такой ситуации не надо бояться: она означает, что на этом промежутке производная принимает значения одного знака, то есть функция является монотонной на нем. Остается заметить, что если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в правом конце отрезка, а наименьшее — в левом. Если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом.

Заметим, что алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке не является единственным способом решения предложенной задачи. Например, можно исследовать функцию на монотонность на данном отрезке и исходя из этого исследования найти наибольшее и наименьшее значения. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения линейной или квадратичной функции на отрезке, вовсе не обязательно применять производную, а достаточно ограничиться известными свойствами этих функций. Например, для функции $y = -7x + 3$ наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[-1; 2]$ будут, соответственно, числа $y(-1) = 10$ и $y(2) = -11$, так как функция убывает на данном отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin 3x + 1$ на отрезке $[2000;\ 2015]$, достаточно заметить, что длина данного отрезка больше периода функции, следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке равны соответственно 3 и –1 — наибольшему и наименьшему значениям функции на всей области определения. Решение задачи с применением стандартного алгоритма в данном случае окажется существенно более долгим и длинным.

При вычислении наибольшего и наименьшего значений функции $y = x^2 - 2x - 5$ на отрезке $[0; 7]$ можно поступить следующим образом. Поскольку абсцисса $x_0 = 1$ вершины параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 5$, принадлежит отрезку $[0; 7]$, то наименьшего значения эта функция достигает в точке $x_0 = 1$ (это значение: $y(1) = -6$), а наибольшего — в том из концов отрезка $[0; 7]$, который наиболее удален от x_0, то есть при $x = 7$. Это значение легко вычислить: $y(7) = 30$).

В некоторых более сложных случаях наибольшее и наименьшее значения функции также можно вычислять без использования производной. Например, найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos 2x + \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. Воспользовавшись формулой двойного аргумента, получим, что $y = -2\sin^2 x + \sin x + 1$. Пусть $\sin x = t$. Поскольку по условию $x \in [0; \pi]$, то $t \in [0; 1]$. Таким образом, задача сводится к поиску наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $y = -2t^2 + t + 1$ на отрезке $[0; 1]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{1}{4} \in [0; 1]$. Поэтому наибольшее значение достигается в точке t_0 $y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$, а наименьшее – в том из концов отрезка $[0; 1]$, который наиболее удален от точки t_0, то есть в точке $t = 1$ $y(1) = 0$. Соответствующие значения x находятся из уравнений $\sin x = \frac{1}{4}$ и $\sin x = 1$ при условии $x \in [0; \pi]$.

Практикум

1. Найдите точку максимума функции $y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3$.

Решение. $y' = -4 + 8x - 3x^2$. $y' = 0$, $3x^2 - 8x + 4 = 0$, $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{3}$, $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

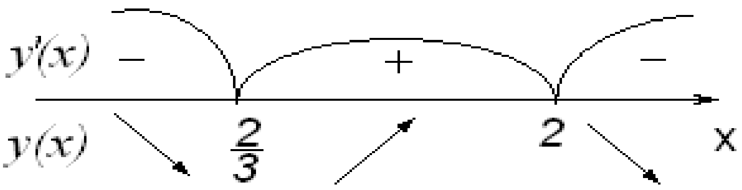

Рис. 20

Определим промежутки знакопостоянства производной, разложив полученное выражение на множители: $-3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-2)$. В точке $x = 2$ производная меняет знак с плюса на минус (рис. 20). Следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 2.

2. Найдите точку минимума функции $y = \frac{4}{x^2} + x + 4$.

Решение. $y' = -\frac{8}{x^3} + 1$. $y' = 0$ при $x = 2$. В этой точке производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума.

Ответ: 2.

3. Найдите точку максимума функции $y = (15 - x)\sqrt{x}$.

Решение. $y' = -\sqrt{x} + (15 - x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$. $y' = 0$, $-2x + 15 - x = 0$, $x = 5$. В точке $x = 5$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 5.

4. Найдите точку минимума функции $y=(x-1{,}5)\sin x+\cos x$, принадлежащую промежутку $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. $y'=\sin x+(x-1{,}5)\cos x-\sin x=(x-1{,}5)\cos x$.

На промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ производная обращается в нуль только при $x=1{,}5$, поскольку $\cos x>0$ при $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. В точке $x=1{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс. Эта точка является единственной точкой минимума на данном промежутке.

Ответ: 1,5.

5. Найдите наибольшее значение функции $y=3\ln(x+2)-3x+10$ на отрезке $[-1{,}5;\,0]$.

Решение. $y'=\dfrac{3}{x+2}-3=\dfrac{3-3x-6}{x+2}=\dfrac{-3(x+1)}{x+2}$.

Производная меняет знак в единственной точке: $x=-1$. Причем знак производной в этой точке меняется с плюса на минус. Эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке, и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$y(-1)=3\ln 1+13=13$.

Ответ: 13.

6. Найдите наименьшее значение функции $y=8+(x-7)\,e^{x-6}$ на отрезке $[3;9]$.

Решение. $y'=e^{x-6}+(x-7)\,e^{x-6}$, $y'=e^{x-6}(x-6)$. В точке $x=6$ производная меняет знак с минуса на плюс. Эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке, и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$y(6)=8-e^0=7$.

Ответ: 7.

7. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Р е ш е н и е. $y = 6\cos x - \frac{36}{\pi}$ $y < 0$. Значит, функция убывает на данном отрезке и наибольшее значение принимает на левом конце отрезка: $y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -6\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 30 + 7 = -3 + 37 = 34$.

О т в е т: 34.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. $y(x) = \frac{x-3}{4-x}$. Найдите касательную, проведенную в точке $x_0 = 3$. Найдите расстояние между этой касательной и касательной, параллельной ей. Постройте графики.

2. $\eta(x) = x^2 - 2x$. Найдите касательные, проходящие через точку (2; – 4). Найдите a и постройте графики.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции $y = (x^2 + 5x + 7)e^{-x} - 3$.

4. Исследуйте функцию $y = e^{x+2} - x - 6$ и постройте ее график.

Вариант 2

1. $y(x) = \frac{2-x}{x+3}$. Найдите касательную, проведенную в точке $x_0 = -4$. Найдите расстояние между этой касательной и касательной, параллельной ей. Постройте графики.

2. $\varphi(x) = x^2 - ax$. $y = x - 4$ — касательная к параболе. Найдите a и постройте графики.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции $y = (x^2 - 7x + 7)e^{-x} - 1$.

4. Исследуйте функцию $y = x + 4 - e^{x+1}$ и постройте ее график.

2. Тригонометрические уравнения в заданиях ЕГЭ

Основная идея решения тригонометрического уравнения — сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям, то есть уравнениям вида $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$.

Каждое из этих уравнений легко решается с помощью тригонометрической окружности, на которой изображаются соответствующие точки, после чего с учетом периодичности тригонометрических функций записывается ответ.

1. Решите уравнение $\dfrac{\cos 4x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\operatorname{tg} x}$.

Решение. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \neq 0 \\ \cos 4x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \end{cases}$,

$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z \\ \cos^2 2x - \sin^2 2x = -\cos 2x \end{cases}$, $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z \\ 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$;

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

2. Найдите все значения *x*, при каждом из которых выражения $\dfrac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin 2x}$ и $\dfrac{\sin 2x - 1}{\sin 2x}$ принимают равные значения.

3. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $\dfrac{3-\cos 2x}{\sqrt{-\cos x}}$ и $\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+2}{\sqrt{-\cos x}}$ принимают равные значения.

Решение. $\dfrac{3-\cos 2x}{\sqrt{-\cos x}}=\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+2}{\sqrt{-\cos x}}$,

$$\begin{cases}3-\cos 2x=-\sin x+2,\\ \cos x<0\end{cases}$$

1. $1-\cos 2x+\sin x=0$,

$1-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sin x=0$,

$\sin x\left(2\sin x+1\right)=0$.

2. $\begin{cases}\cos x<0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.\end{cases}$ $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

4. Решите уравнение $\sin 2x+1=\sin^2 x+6\operatorname{ctg} x$.

Решение. $2\sin x\cos x+1=\sin^2 x+6\dfrac{\cos x}{\sin x}$,

$2\sin x\cos x+\cos^2 x-6\dfrac{\cos x}{\sin x}=0$

$\dfrac{\cos x}{\sin x}\left(2\sin^2 x+\sin x\cos x-6\right)=0$

$\cos x=0$ или $-4\sin^2 x+\sin x\cos x-6\cos^2 x=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ или $4\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+6=0$, но $D<0$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

5. Решите уравнение $2\sin 2x+\cos^2 x=1+9\operatorname{tg} x$.

6. Решите уравнение $\sqrt{\sin^2 0{,}5x - 6\sin 0{,}5x + 9} + \sqrt{(2\sin 0{,}5x - 5)^2} = 8$.

Р е ш е н и е. $|\sin 0{,}5x - 3| + |2\sin 0{,}5x - 5| = 8$.

Так как $-1 \le \sin 0{,}5x \le 1$, то $-4 \le \sin 0{,}5x - 3 \le -2$ и $-7 \le 2\sin 0{,}5x - 5 \le -3$ для любого x.

Тогда уравнение примет вид $3 - \sin 0{,}5x + 5 - 2\sin 0{,}5x = 8$ или $\sin 0{,}5x = 0$, $x = 2\pi n, n \in Z$.

О т в е т: $2\pi n, n \in Z$.

7. Решите уравнение $\sin^2 x + 6\sin x \sin\frac{x}{2} + 9 = 9\cos^2\frac{x}{2}$.

8. Решите уравнение $\cos 2x \cdot \left(\sqrt{\cos 2x - \frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\right) = \frac{\cos 2x + 1}{2}$.

Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Решение некоторых тригонометрических уравнений предполагает отбор корней, соответствующих тем или иным ограничениям. В некоторых уравнениях отбор корней оговорен в условии или диктуется дополнительными ограничениями: знаменатель дроби не равен нулю, выражение под знаком корня четной степени неотрицательно, выражение под знаком логарифма положительно и т. п. Исключив те точки, которые не соответствуют условию задачи или введенным ограничениям, следует записать ответ в возможно более компактной форме.

1. А. Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Р е ш е н и е. А. Преобразуем уравнение: $1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$;

$2\sin^2 x - \sin x = 0$; $\sin x(2\sin x - 1) = 0$, откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi n$, где $n \in Z$.

Из уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ находим: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in Z$.

Б. С помощью числовой окружности (рис. 21) отберем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Получаем числа: -2π; $-\dfrac{11\pi}{6}$; $-\dfrac{7\pi}{6}$.

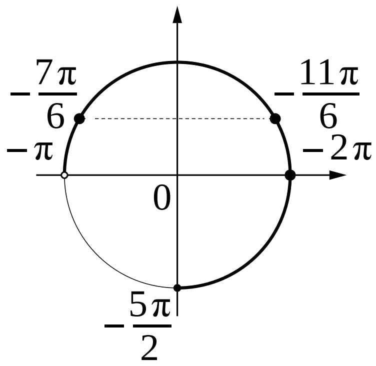

Рис. 21

О т в е т: А. πn, $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Б. -2π; $-\dfrac{11\pi}{6}$; $-\dfrac{7\pi}{6}$.

Критерии оценивания:

«2» — обоснованно получены верные результаты в обоих ответах

«1» — обоснованно получен верный ответ в пункте «а» или в «б»;

— получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — «а» и «б».

«0» — решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

М а к с и м а л ь н ы й б а л л — «3».

2. А. Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}75 = \cos^2 x$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Р е ш е н и е. А. $\cos^2 x - \sin^2 x + 0{,}75 = \cos^2 x$; $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$; $\sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$; $x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Б. Отберем корни:

$$-4\pi \le \frac{\pi}{3} + \pi k \le -\frac{5\pi}{2} \qquad -4\pi \le \frac{2\pi}{3} + \pi k \le -\frac{5\pi}{2}$$

$$-24 \le 2 + 6k \le -15 \qquad -24 \le 4 + 6k \le -15$$

$$-\frac{26}{6} \le k \le -\frac{17}{6} \qquad -\frac{28}{6} \le k \le -\frac{19}{6}$$

$$k = -4; -3 \qquad k = -4$$

$$x = -\frac{11\pi}{3};\ x = -\frac{8\pi}{3} \qquad x = -\frac{10\pi}{3}$$

Ответ: А. $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

Б. $-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

Критерии оценивания:

«2» — обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

«1» — обоснованно получен верный ответ в пункте «а» или «б».

«0» — решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

3. Решите уравнение $\frac{4\cos 2x - 9\sin x - 4}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

Решение. $\begin{cases} 4(1 - 2\sin^2 x) - 9\sin x - 4 = 0, \\ -\cos x > 0; \end{cases}$

1) $-8\sin^2 x - 9\sin x = 0$; $\sin x(-8\sin x - 9) = 0$; $\sin x = 0$ или $\sin x = -\frac{9}{8}$;

$x = \pi n, n \in Z$.

2) $\begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ \cos x < 0 \end{cases}$

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in Z$.

4. $\frac{10\sin^2 x - 3\sin x - 4}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

Решение. $\begin{cases} 10\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{4}{5}, \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\dfrac{4}{5} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in Z \end{array} \right.$

Ответ: $\arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in Z$.

5. Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}25$. Укажите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$; $\cos x = \pm\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

$3\pi \le \frac{\pi}{3} + \pi n \le \frac{9\pi}{2}$	$3\pi \le -\frac{\pi}{3} + \pi n \le \frac{9\pi}{2}$
$\frac{8}{3} \le n \le \frac{25}{6}$	$\frac{10}{3} \le n \le \frac{29}{6}$
$n = 3, n = 4$	$n = 4$
$x = \frac{10}{3}\pi; x = \frac{13}{3}\pi$	$x = \frac{11\pi}{3}$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; $\frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}$.

3. Методы решения неравенств

3.1. Метод рационализации

Изучение математики невозможно без умения решать разнообразные неравенства, поэтому рассмотрим один из способов решения — метод рационализации. Его преимущества заключаются в сокращении объема выкладок при переходе к рациональному неравенству.

Итак, заменяем сложное выражение $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при котором неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$. Выделим некоторые выражения $F(x)$и соответствующие им рационализирующие выражения $G(x)$, где f, g, h, p, q — выражения с переменной x $(h>0; h\neq 1; f>0; g>0)$, где a — фиксированное число $(a>0; a\neq 1)$.

№	**Выражение** F	**Выражение** G
1 1а 1б	$\log_a f-\log_a g$ $\log_a f-1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f-\log_h g$ $\log_h f-1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h-\log_g h$ $(g\neq 1, f\neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	h^f-h^g $(h>0)$ h^f-1	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	f^h-g^h $(f>0; g>0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

Некоторые следствия (с учетом области определения неравенства):

- $\log_h f\cdot\log_p q\vee 0\Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(q-1)\vee 0$;
- $\log_h f+\log_h g\vee 0\Leftrightarrow (fg-1)(h-1)\vee 0$;
- $\sqrt{f}-\sqrt{g}\vee 0\Leftrightarrow f-g\vee 0$;
- $\dfrac{h^f-h^g}{h^p-h^q}\vee 0\Leftrightarrow\dfrac{f-g}{p-q}\vee 0.$

Пример 1. Решите неравенство $\left|x^2-8x+15\right|\le\left|15-x^2\right|$.

Р е ш е н и е. $\left|x^2-8x+15\right|-\left|15-x^2\right|\le 0,$

$$(x^2-8x+15)^2-(15-x^2)^2\le 0,$$

$$(x^2-8x+15-15+x^2)(x^2-8x+15+15-x^2)\le 0,$$

$$x\cdot(x-4)\cdot(4x-15)\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{15}{4}\right]\cup[4;+\infty).$$

О т в е т: $\left[0;\dfrac{15}{4}\right]\cup[4;+\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{|x-1|-|2x+1|}{|x-2|-|2x+2|}\geq 0.$

Решение.

$$\frac{(x-1)^2-(2x+1)^2}{(x-2)^2-(2x+2)^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+2)}{x(x+4)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+4}\geq 0, \\ x\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup[-2;0)\cup(0;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-4)\cup[-2;0)\cup(0;+\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\leq 0.$

Решение. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\leq 0;$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4(1-x)}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{1}}\leq 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-1)-4(1-x)}{(x+7)-1}\leq 0, \\ x^2-1\geq 0, \\ 1-x\geq 0, \\ x+7\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x+6}\leq 0, \\ x^2\geq 1, \\ -7\leq x\leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+5)(x-1)}{x+6}\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} -7\leq x\leq -1 \\ x=1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $[-7;-6)\cup[-5;-1]\cup\{1\}$.

Пример 4. Решите неравенство $\left(1-\dfrac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2}\geq 1.$

Решение. На множестве $1-\dfrac{2x}{5}>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{2}$ исходное неравенство равносильно $-\dfrac{2x}{5}\left(7+11x-6x^2\right)\geq 0$.

$$x(2x+1)(3x-7)\geq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов и учитывая ограничение, приходим к ответу: $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]\cup\left[\dfrac{7}{3};\dfrac{5}{2}\right)$.

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]\cup\left[\dfrac{7}{3};\dfrac{5}{2}\right)$.

Пример 5. Решите неравенство $\left(4^{x+1}+2^{x+1}-1\right)^{x^2-x}\ge 1$.

Решение. Множество, на котором определено неравенство, находится из условия $4^{x+1}+2^{x+1}-1>0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2^{x+1}>0, \\ t^2+t-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow t>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x>-2+\log_2\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Произведем рационализацию неравенства $\left(4^{x+1}+2^{x+1}-1\right)^{x^2-x}\ge 1$:

$\left(4^{x+1}+2^{x+1}-2\right)\left(x^2-x\right)\ge 0$,

$\left(2^{x+1}-1\right)\left(2^{x+1}+2\right)x(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow \left(2^{x+1}-1\right)x\,(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)\,x\,(x-1)\ge 0$.

Из последнего неравенства получаем $x\in[-1;\,0]\cup[1;\,+\infty)$. Все это множество принадлежит области определения. Следовательно, оно и является ответом.

Ответ: $[-1;\,0]\cup[1;\,+\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^4-2}-1}{x+1}\le x-1$.

Решение. Находим область определения неравенства. $x\in\left(-\infty;\,-\sqrt[4]{2}\right]\cup\left[\sqrt[4]{2};\,+\infty\right)$. (1)

Далее неравенство преобразуем к виду $\dfrac{\sqrt{x^4-2}-x^2}{x+1}\le 0$ и совершаем переход: $\dfrac{x^4-2-x^4}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+1}\ge 0 \Leftrightarrow x>-1$.

Пересекая полученное множество с (1), приходим к ответу: $x\ge\sqrt[4]{2}$.

Ответ: $\left[\sqrt[4]{2};\,+\infty\right)$.

Пример 7. Решите неравенство $\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\dfrac{6}{x+1}\right)\ge -1$.

Решение. Неравенство определено для значений переменной, удовлетворяющих условиям $\begin{cases} 3-x>0, \\ 3-x\ne 2, \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3, \\ x\ne 1. \end{cases}$

При этих значениях x равносильны преобразования $\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\frac{x+1}{6}\right)\le 1$

$$\left(\frac{3-x}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{6}-\frac{3-x}{2}\right)\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\ge 0.$$

Пересечение полученного множества $x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$ с областью определения данного неравенства дает ответ $x\in(-1;1)\cup[2;3)$.

Ответ: $(-1;1)\cup[2;3)$.

Пример 8. Решите неравенство $\log_{5-4x-x^2}\left(5-9x-2x^2\right)\le\log_{1-x}(1-2x)$.

Решение. Разложим квадратные трехчлены на линейные множители, тогда исходное неравенство можно переписать в виде $\log_{(x+5)(1-x)}((x+5)(1-2x))\le\log_{1-x}(1-2x)$.

Оно определено при $\begin{cases}-5<x<\frac{1}{2},\\ x\ne 0,\\ (1-x)(x+5)\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5<x<\frac{1}{2},\\ x\ne 0,\\ x^2+4x-4\ne 0.\end{cases}$

Переходя к основанию $(1-x)$, имеем

$$\frac{\log_{1-x}(x+5)+\log_{1-x}(1-2x)}{1+\log_{1-x}(x+5)}-\log_{1-x}(1-2x)\le 0,\ \frac{\log_{1-x}(x+5)\cdot(\log_{1-x}(1-2x)-1)}{\log_{1-x}((x+5)(1-x))}\ge 0.$$

Теперь, используя схему рационализации, получим рациональное неравенство: $\frac{(-x)(x+4)(-x)(-3x)}{(-x)\left(-x^2-4x+4\right)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{x^2(x+4)}{x^2+4x-4}\le 0$, которое равносильно данному на его множестве определения.

Таким образом, $\begin{cases}-5<x<\frac{1}{2},\\ x\ne 0,\\ \frac{x+4}{x^2+4x-4}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-5;-2-2\sqrt{2}\right)\cup[-4;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-5;-2-2\sqrt{2}\right)\cup[-4;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

3.2. Использование свойств функции

1. Область определения функции

Пример. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right)>0.$$

Р е ш е н и е. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases} x^2-6x+5\ge 0, \\ 12x-2x^2-10\ge 0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right..$$

При $x=1$ получаем, что исходное неравенство обращается в неверное неравенство $0>0$.

При $x=5$ имеем верное неравенство: $\frac{1}{5}>0$.

О т в е т: 5.

2. Ограниченность функции

Пример 1. Решите неравенство $\log_5 x\le\sqrt{1-x^4}$.

Р е ш е н и е. Область определения неравенства задается условиями: $\begin{cases} x>0, \\ 1-x^4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le 1$.

Для всех x из полученного множества имеем $\log_5 x\le 0$, а $\sqrt{1-x^4}\ge 0$.

Следовательно, решением этого неравенства является промежуток (0; 1].

О т в е т: (0; 1].

Пример 2. Решите неравенство $5^{-|x-2|}\cdot\log_2\left(4x-x^2-2\right)\ge 1$.

Р е ш е н и е. Так как $0<5^{-|x-2|}\le 1$ и $\log_2\left(4x-x^2-2\right)=\log_2\left(2-(x-2)^2\right)\le 1$, приходим к системе $\begin{cases} \log_2\left(4x-x^2-2\right)=1 \\ 5^{-|x-2|}=1. \end{cases}$

Получаем: $x=2$.

О т в е т: 2.

3. Монотонность функции

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{x-1}+2^x+\log_2 x \geq 2$.

Решение. Область определения данного неравенства есть промежуток $[1;+\infty)$. Функция $y=\sqrt{x-1}+2^x+\log_2 x$ возрастает на этом промежутке как сумма возрастающих функций. Но при $x=1$ функция $y(x)$ принимает значение 2. Таким образом, исходное неравенство выполняется на всей области определения.

Ответ: $[1;+\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{4-x}-2 \leq x|x-3|+4x$.

Решение. Пусть $f(x)=\sqrt{4-x}-2$, $g(x)=x|x-3|+4x$, тогда $f(x)\leq g(x)$.

Функция $f(x)=\sqrt{4-x}-2$ определена на луче $(-\infty;4]$ и убывает, а функция $g(x)=\begin{cases}7x-x^2, x\leq 3\\ x^2+x, x\geq 3\end{cases}$ возрастает на всей прямой. Поскольку $f(0)=g(0)$, то исходное неравенство равносильно условию $0\leq x\leq 4$.

Ответ: $[0;4]$.

Практикум

Решите неравенства

1. $\sqrt{x-1}+2^x+\log_2 x<6$

Ответ: $[1;2)$.

2. $\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\geq 0$

Ответ: $\{2\}\cup[6;+\infty)$.

3. $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geq 0$

Ответ: $\{5\}\cup(4+\sqrt{2};+\infty)$.

4. $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le 0$

Ответ: 1.

5. $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2.$

Ответ: $(-0{,}5;\,0]\cup[1;\,4).$

6. $\left(x-\frac{15}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{-4x-1}{4}}\left(x^2+2x+1\right)\right|\le 2\cdot\left|\log_{\frac{-4x-1}{4}}\left(x^2+2x+1\right)\right|.$

Ответ: $(-\infty;\,-3]\cup\{-2\}.$

7. $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)}\le 0.$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};\,-\frac{1}{3}\right].$

8. $\log_{24x-4x^2-27}\left(11x-2x^2-9\right)\ge\log_{2x-3}(x-1).$

Ответ: $\left(3-\sqrt{2};\,2\right)\cup(2;\,4]\cup\left(3+\sqrt{2};\,\frac{9}{2}\right).$

9. $2^{x^2}\cdot 3^x<6.$

Ответ: $(-\log_2 6;\,1).$

10. $\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2\ge 4\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right).^2$

Ответ: $0<x\le 1, x=2{,}3<x<4{,}4<x<5.$

11. $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}<100.$

Ответ: $(1;\,1000).$

12. $\sqrt{5-x}<\dfrac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}.$

Ответ: $1<x<2{,}4<x\le 5.$

13. $x^{\lg x}>10x^{-\lg x}+3.$

Ответ: $0<x<10^{-\sqrt{\lg 5}},\ 10^{\sqrt{\lg 5}}<x.$

14. $\log_x(5-x)<\log_x\left(x^3-7x^2+14x-5\right)-\log_x(x-1)$.

Ответ: $(1;2)\cup(4;5)$.

15. $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right)>0$.

Ответ: $(2;5)$.

16. $\dfrac{1}{6x^2-5x}\ge\dfrac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{6}\right)$.

17. $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0$.

Ответ: $x<-2, -\sqrt{2}<x<-1,\ 1<x<\sqrt{2}, x>2$.

18. $\log_{84-2x-2x^2}\cos x\le\log_{x+19}\cos x$.

Ответ: $\left(-\dfrac{1+\sqrt{167}}{2};-\dfrac{13}{2}\right]\cup\left[5;\quad\dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}\right)\cup\{-2\pi\}\cup\{0\}$

19. $\dfrac{\sqrt{2x+3}-|x|}{\sqrt{9x-11}-|x+1|}\le 0$.

Ответ: $[11{,}9;3)\cup(3;4)$.

20. $\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}+1}{x-2}<\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $[1;2)\cup(10;+\infty)$.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ IV РАЗДЕЛА

1. Избранные вопросы стереометрии

1.1. Формула Ньютона — Симпсона

Тело, имеющее объем, расположено между плоскостями $z=0$ и $z=h$. Известно, что площадь сечения тела плоскостью $z=\text{const}$ есть функция вида $S(z)=az^2+bz+c$, $0\le z\le h$. Доказать формулу:

$$V=\frac{h}{6}\cdot\left(S(0)+4S\left(\frac{h}{2}\right)+S(h)\right).$$

Найдем объем тела из общей формулы:
$V=\int\limits_0^h S(z)dz=\frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}+ch=\frac{h}{6}\left(2ah^2+3bh+6c\right)$. С другой стороны, запишем систему равенств: $\begin{cases} S(0)=c \\ S(h)=ah^2+bh+c \\ 4S\left(\frac{h}{2}\right)=ah^2+2bh+4c. \end{cases}$

В результате сложения получаем выражение в скобках в формуле объема, приведенной выше. Так как для пирамиды, усеченной пирамиды, конуса, усеченного конуса, шара, призмы необходимое условие квадратичной зависимости площади сечения от аппликаты выполняется, то формула достаточно универсальна.

Пример 1. Найдите объем трехосного эллипсоида, заданного своей канонической формулой: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Р е ш е н и е. Для вычисления объема учтем, что $S(-c)=S(c)=0$. Так как сечение вырождается в точку, и $S(0)=\pi ab$, то в сечении получается обыкновенный эллипс.

Таким образом, имеем $V=\frac{2c}{6}\cdot\left(S(-c)+4S(0)+S(c)\right)=\frac{4}{3}\pi abc$.

Пример 2. Докажите, что объем треугольной усеченной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен произведению площади перпендикулярного сечения $S_\perp$ на среднее арифметическое длин трех боковых ребер.

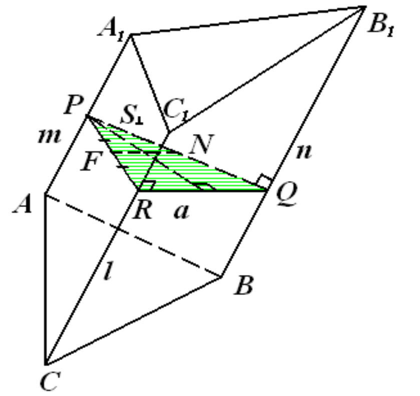

Рис. 22

Решение. Имеем площадь сечения

$S(0) = S_{CC_1B_1B} = \dfrac{n+l}{2} \cdot a$; $S(h) = 0$, где $a = PQ$,

$h = \dfrac{2S_\perp}{a}$ (рис. 22).

Если через середины PR и PQ провести отрезки параллельные ребрам, то площадь $S\left(\dfrac{h}{2}\right) = \dfrac{\dfrac{m+n}{2} + \dfrac{m+l}{2}}{2} \cdot \dfrac{a}{2}$. После подстановки в формулу Симпсона окончательно получаем объем усеченной призмы

$$V = S_\perp \cdot \frac{m+n+l}{3}.$$

Пример 3. Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью так, что боковое ребро AA_1 делится в отношении $AM{:}A_1M = 1{:}2$, ребро CC_1 в отношении $CP{:}C_1P = 2{:}3$. Найдите отношение объемов многогранников $A_1B_1C_1PM$ и $ABCPMB_1$.

1.2. Объем многогранника, в который вписан шар

Пусть в тетраэдре $ABCD$ точка O — центр вписанной сферы. Тогда объем каждой пирамиды $OABC$, $OBCD$, $OCDA$, $OBDA$ равен $\dfrac{1}{3} r \cdot S_i$, где r — высота каждой пирамиды, а S_i — площади граней исходного тетраэдра. Таким образом, объем тетраэдра $ABCD$ вычисляется по формуле: $V = \dfrac{1}{3} r \cdot S_{полн.}$.

Очевидно, что формула применима к любому многограннику, в который можно вписать шар.

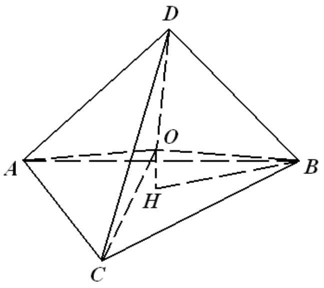

Рис. 23

Пример. Найдите объем тетраэдра, радиусы вписанной и описанной сфер, если противоположные ребра тетраэдра попарно равны 5, 6, 7.

Р е ш е н и е. Точка H — центр описанной окружности треугольника ABC, OH — перпендикуляр к плоскости ABC, O — центр описанной сферы (рис. 23). Попарное равенство ребер означает, что тетраэдр вписан в прямоугольный параллелепипед, что видно на рисунке 24.

Определим измерения параллелепипеда из системы уравнений $\begin{cases} a^2+b^2=49 \\ a^2+c^2=36 \\ c^2+b^2=25 \end{cases}.$

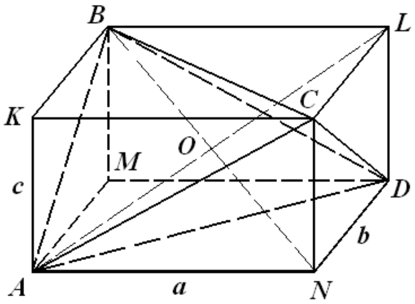

Рис. 24

Решением является тройка чисел: $a=\sqrt{30}$, $b=\sqrt{19}$, $c=\sqrt{6}$. Так как объемы тетраэдров $KABC$, $LBCD$, $NACD$, $MABD$ равны $\frac{abc}{6}$, то объем исходного тетраэдра равен $V=abc-4\cdot\frac{abc}{6}=\frac{abc}{3}$ или $V=2\cdot\sqrt{95}$.

Площадь полной поверхности тетраэдра равна $S_{\Sigma}=4\cdot S_{\Delta}$, где площадь грани вычисляем по формуле Герона. Таким образом, площадь полной поверхности равна $24\sqrt{6}$. Отсюда радиус вписанной сферы $r=\frac{\sqrt{570}}{24}$. Радиус описанной сферы равен половине диагонали параллелепипеда, то есть $R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{\sqrt{55}}{2}$.

Если подсчитать радиус описанной окружности грани тетраэдра по формуле $R_{\Delta}=\frac{abc}{4S_{\Delta}}=\frac{35\sqrt{6}}{24}$, то выполняется равенство $R^2=R_{\Delta}^2+r^2$. Таким образом, центры вписанной и описанной сфер совпадают.

1.3. Объемы тетраэдров, имеющих равный трехгранный угол

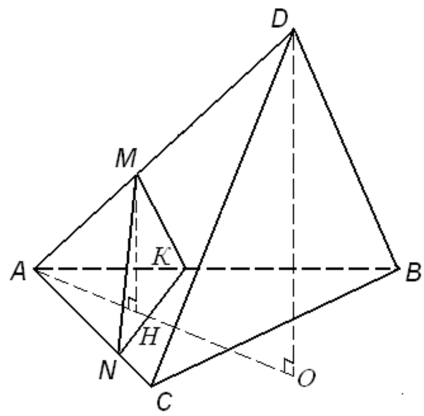

Рис. 25

Исходя из рисунка 25, подобия треугольников и теоремы о соотношении площадей треугольников, имеющих равный угол, определим отношение объемов тетраэдров, имеющих равный трехгранный угол

$$\frac{V_{AMNK}}{V_{ABCD}} = \frac{MH \cdot S_{ANK}}{DO \cdot S_{ABC}} = \frac{MH \cdot AK \cdot AN}{DO \cdot AB \cdot AC} = \frac{AM \cdot AK \cdot AN}{AD \cdot AB \cdot AC}.$$

Таким образом, отношение объемов равно отношению произведений трех ребер, исходящих из вершины общего трехгранного угла каждого тетраэдра.

Пример. В треугольной пирамиде *ABCD* на ребре *AD* взята точка *M*, а на ребре *AB* взята точка *K* так, что *AM* : *MD* = 7:3, *AK* : *KB* = 1:4. Сколько процентов от объема пирамиды *ABCD* составляет объем пирамиды *AMKC*?

Подставим отношение отрезков в полученную выше формулу и получим следующий результат: $\frac{V_{AMKC}}{V_{ABCD}} \cdot 100\ \% = \frac{AM \cdot AK}{AD \cdot AB} \cdot 100\ \% = \frac{7 \cdot 1}{10 \cdot 5} \cdot 100\ \% = 14\ \%$.

1.4. Теоремы Паппа — Гюльдена

В процессе реформирования школьной математики за последние 50 лет произошла потеря очень интересных и несложных теорем, которые были в программе раньше. Речь идет о теоремах Паппа (Папп Александрийский — математик, III в. н. э.) — Гюльдена (Пауль Гюльден — швейцарский математик, 1577—1643 гг.). Причина проста: примерные программы среднего (полного) общего образования по алгебре и началам анализа для базового и профильного уровней (ФГОС первого поколения) хотя и включают тему «Примеры применения интеграла в физике и геометрии», но во всех учебниках для старших классов на нее отводится не более двух часов. В программе же по геометрии ограничиваются использованием интеграла только для вывода основных формул объема тел.

В 60-е годы XX века средние школы были политехническими, обучение было ближе к практике, а внимание обращалось именно на практическое использование школьником теоретических знаний, полученных на уроках. В известном задачнике того времени по геометрии, который был в параллели с учебниками А. П. Киселева [17], мы обнаруживаем задачи на применение этих теорем. Причем вначале предлагается проверить теоремы Паппа — Гюльдена для случаев вращения известных простых фигур, а потом уже посчитать сложные фигуры. Нужно иметь в виду, что сами теоремы не только просто выводятся, но и легко запоминаются. При этом следует отметить, что авторам данных теорем интегральное исчисление было неизвестно.

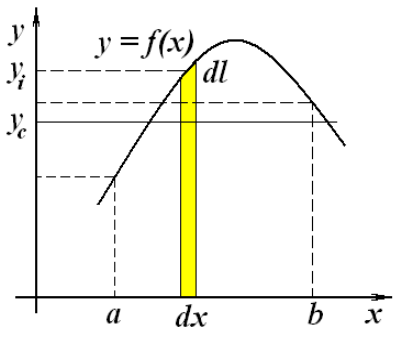

Рис. 26

Теорема 1. Площадь поверхности, образованной вращением плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в той же плоскости кривой, равна длине кривой, умноженной на длину окружности, проходимой ее центром тяжести (рис. 26).

На рисунке 26 показана кривая, вращающаяся вокруг оси *Ox*. Разбиваем отрезок [*a*; *b*] на *n* отрезков длиной Δx. Каждому промежутку Δx на кривой соответствует элемент дуги Δl с координатой y_i. У каждого такого элемента центр тяжести совпадает с ординатой. Масса *i*-го отрезка m_i равна длине отрезка, то есть $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$, а масса всей кривой *M* равна длине кривой на данном отрезке.

Таким образом, ордината центра тяжести кривой равна: $y_c = \dfrac{\sum_i m_i y_i}{M} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x}{M}$, где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. При замене предела суммы интегралом, а Δx дифференциалом *dx* получаем ординату центра тяжести:

$$y_c = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_i m_i y_i\right)}{M} = \frac{\int_a^b y dl}{L} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx}{L}.$$ С другой стороны, поверхность тела вращения равна $F = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$. В результате получаем формулу, соответствующую первой теореме Паппа — Гюльдена:

$$F = 2\pi\cdot y_c \cdot L.$$

Теорема 2. Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в той же плоскости, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, проходимой ее центром тяжести.

Если первая теорема мало применима, поскольку вычисление длины какой-либо дуги или площади поверхности вращения сводятся в большинстве случаев к достаточно сложным интегралам, то вторая теорема предоставляет большие возможности для использования.

Итак, на рисунке 27 показана криволинейная трапеция, вращающаяся вокруг оси Ox. Разбиваем пластинку на n полосок толщиной $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ и длиной y_i. У каждой полоски центр тяжести лежит в ее середине. Масса i-й полоски m_i равна площади этой полоски, то есть $y_i\,\Delta x$, а масса всей пластинки M равна площади криволинейной трапеции.

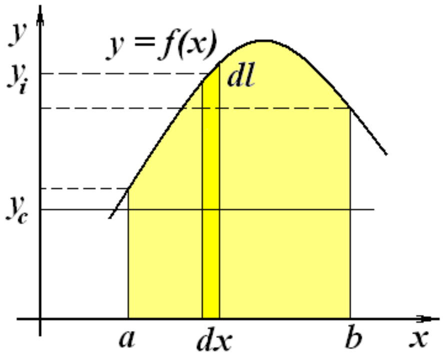

Рис. 27

Таким образом, ордината центра тяжести криволинейной трапеции $y_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i \dfrac{y_i}{2}}{M} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \cdot \Delta x}{2M}$.

При замене предела суммы интегралом, а Δx дифференциалом dx получаем ординату центра тяжести: $y_c = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_i m_i \dfrac{y_i}{2}\right)}{M} = \dfrac{\int_a^b y^2 dx}{2\int_a^b y dx}$. С другой стороны, объем тела вращения равен: $V = \pi\int_a^b y^2 dx$. В результате получаем формулу, соответствующую второй теореме Паппа — Гюльдена: $V = 2\pi \cdot y_c \cdot S$.

Рассмотрим задачи на теоремы Паппа — Гюльдена:

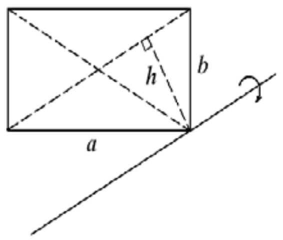

Рис. 28

Задача 1. Прямоугольник со сторонами a и b вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельно диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объем (рис. 28).

Р е ш е н и е. Учитывая, что $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ есть расстояние от центра тяжести до оси, то площадь поверхности тела вращения $F = 2\pi h \cdot P = \frac{4\pi \cdot ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а объем тела вращения равен $V = 2\pi h \cdot S = \frac{2\pi \cdot a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

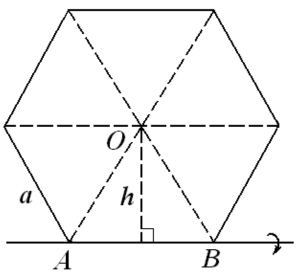

Рис. 29

Задача 2. Правильный шестиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной a. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объем (рис. 29).

Р е ш е н и е. Высота треугольника AOB $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ есть расстояние от центра тяжести до оси.

Следовательно, площадь поверхности тела вращения $F = 2\pi h \cdot P = 6\sqrt{3}\pi \cdot a^2$, а объем тела вращения равен $V = 2\pi h \cdot S = \frac{9\pi}{2} a^3$.

Решение учащегося, незнакомого с теоремой, будет несколько длиннее. Площадь поверхности состоит из боковой поверхности двух конусов, боковой поверхности цилиндра и боковой поверхности двух усеченных конусов. Имеем: $S_1 = 2\pi ah$; $S_2 = 4\pi ah$; $S_3 = 2\pi a \cdot (h + 2h)$. В результате $F = S_1 + S_2 + S_3 = 12\pi ah = 6\sqrt{3}\pi \cdot a^2$. Тело вращения состоит из цилиндра и двух усеченных конусов за минусом двух конусов. Имеем $V_1 = \pi \cdot a \cdot (2h)^2$;

$V_2 = \dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\left((2h)^2 + (h)^2 + (2h)\cdot h\right);$ $\qquad V_3 = \dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot(h)^2$. В результате:

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi a\cdot\left(4h^2 + \frac{7h^2}{3} - \frac{h^2}{3}\right) = 6\pi a h^2 = \frac{9\pi a^3}{2}.$$

Задача 3. Найдите объем и площадь поверхности тора (поверхность, полученная от вращения окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее) с радиусом сечения, равным r и расстоянием от центра сечения до центральной оси, равным a (рис. 30).

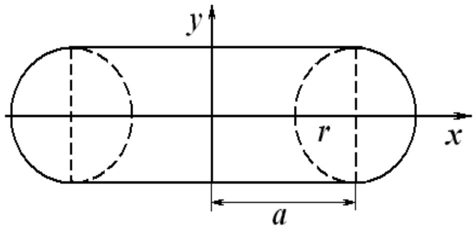

Рис. 30

Решение. Эта практически непосильная для большинства школьников задача, связанная с интегралами, легко решается с помощью формул Паппа — Гюльдена. Площадь поверхности тела вращения (в данном случае вращение круга радиуса r вокруг оси Oy) $F = 2\pi a\cdot P = 2\pi\cdot a\cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$, а объем тела вращения равен $V = 2\pi a\cdot S = 2\pi^2 ar^2$. Решение с помощью интегралов, например для определения объема, может быть следующим.

Имеем уравнение окружности $(x-a)^2 + y^2 = r^2$. Рассматриваем вращение положительной части окружности вокруг оси Oy. Таким образом, объем тела вращения равен:

$$V = 2\pi\int_0^r\left(\left(a+\sqrt{r^2-y^2}\right)^2 - \left(a-\sqrt{r^2-y^2}\right)^2\right)dy = 8\pi a\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\,dy = 8\pi a\cdot\frac{\pi r^2}{4} = 2\pi^2 ar^2.$$

Задача 4. Спасательный круг представляет собой тор. Диаметр сечения $d = 12$ см; внешний диаметр спасательного круга $D = 75$ см. Вычислите поверхность спасательного круга и его объем [17].

Решение. Подставив данные в полученные выше формулы, получаем ответ: $F = 4\pi^2 ar = \pi^2 d(D-d) \approx 74{,}61$ дм^2. Объем тела вращения равен: $V = 2\pi^2 ar^2 = \dfrac{\pi^2}{4}(D-d)d^2 \approx 22{,}384$ дм^3.

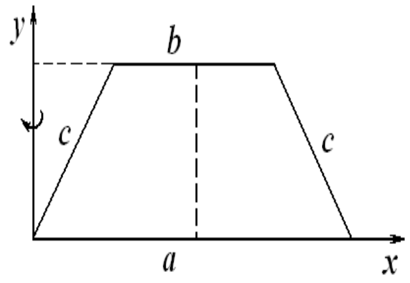

Рис. 31

Задача 5. Из параллельных сторон трапеции бо́льшая равна a, а меньшая равна b; каждая непараллельная сторона равна c. Трапеция эта вращается около прямой, проведенной перпендикулярно к стороне a через конец последней (рис. 31). Вычислите полную поверхность полученного тела вращения (a = 15 см; b = 9 см; c = 5 см) (задача выпускного экзамена в гимназии за 1891 г. Дана формулировка тех лет) [18].

Решение. Воспользовавшись теоремой, получаем: $F = 2\pi\frac{a}{2}\cdot P = \pi(a+b+2c)a$. Откуда $F = 510\pi \approx 16$ дм^2. Дополнительно к площади поверхности тела вращения можно определить и его объем. Для нахождения объема тела вращения необходима площадь трапеции, после вычисления которой имеем объем: $V = 2\pi\frac{a}{2}\cdot S = \frac{\pi}{2}a(a+b)\sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$ и $V = 720\pi \approx 2{,}262$ дм^3.

Рассмотрим возможное решение ученика. Площадь поверхности состоит из боковой поверхности конуса, площади кольца, площади круга и боковой поверхности усеченного конуса. Имеем $S_1 = \pi\cdot c\cdot\frac{a-b}{2}$; $S_2 = \pi\left(\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2\right) = \pi\cdot ab$; $S_3 = \pi\cdot a^2$; $S_4 = \pi\cdot c\cdot\left(a + \frac{a+b}{2}\right)$. В результате $F = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \pi(a+b+2c)a$. Тело вращения состоит из усеченного конуса без внутреннего конуса.

Имеем $V_1 = \frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot\left(a^2 + \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 + a\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\right)$; $V_2 = \frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Таким образом, получаем $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2}ha\cdot(a+b) = \frac{\pi}{2}a(a+b)\cdot\sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$.

Задача 6. Паровозное депо имеет в плане вид полукольца (рис. 32: вид спереди и сверху), внутренний диаметр которого равен 20 м; ширина полукольца 9 м. В поперечном сечении депо имеет вид прямоугольной трапеции *ABCD* (отрезок *BC* соответствует покатой крыше), параллельные стороны которой равны 4, 25 м и 6, 5 м. Найдите объем депо [17].

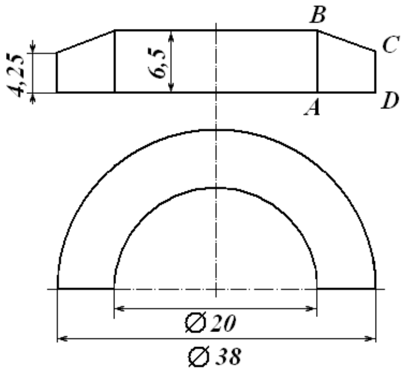

Рис. 32

Р е ш е н и е. Площадь трапеции *ABCD* равна 48,375 м^2, а расстояние от оси до центра тяжести есть $x_c \approx 14{,}5$. Таким образом, объем депо равен $V = \pi \cdot x_c S \approx 2204\,\text{м}^3$.

Конечно, паровозы в настоящее время только в музеях под открытым небом, и депо выглядят не так, но здания подобной формы существуют.

Задача 7. Правильный восьмиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной *a*. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объем (рис. 33).

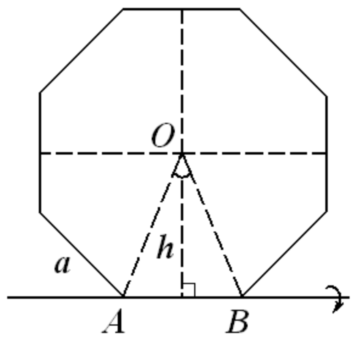

Рис. 33

Р е ш е н и е. В треугольнике *AOB* угол при вершине равен 45°. Высота треугольника *AOB* $h = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} 22{,}5^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{1+\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{2} \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)$ есть расстояние от центра тяжести до оси. Следовательно, площадь поверхности тела вращения $F = 2\pi h \cdot P = 8\pi \cdot a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$, а объем тела вращения равен $V = 2\pi h \cdot S = 2\pi \cdot a^3\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

И опять, р е ш е н и е у ч а щ е г о с я, не знакомого с теоремой, будет довольно громоздким. Площадь поверхности состоит из боковой поверхности двух конусов, боковой поверхности цилиндра, боковой поверхности двух колец и боковой поверхности двух усеченных конусов. Имеем $S_1 = 2\pi \cdot a\left(h - \frac{a}{2}\right)$;

$S_2 = 4\pi\cdot ah$; $S_3 = 2\pi\left(\left(h+\dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(h-\dfrac{a}{2}\right)^2\right) = 4\pi\cdot ah$; $S_4 = 2\pi\cdot a\cdot\left(2h+h+\dfrac{a}{2}\right)$. В результате, $F = S_1 + S_2 + S_3 + S_3 = 16\pi ah = 8\pi\cdot a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Тело вращения состоит из цилиндра и двух усеченных конусов за минусом двух конусов. Имеем следующее решение: $V_1 = \pi\cdot a\cdot(2h)^2$; $V_2 = \dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\left((2h)^2 + \left(h+\dfrac{a}{2}\right)^2 + (2h)\cdot\left(h+\dfrac{a}{2}\right)\right)$; $V_3 = \dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\left(h-\dfrac{a}{2}\right)^2$. Таким образом, получаем: $V = V_1 + V_2 - V_3 = 2\pi\sqrt{2}\cdot ah^2 + \pi\sqrt{2}\cdot a^2h + 4\pi\cdot ah^2 = 2\pi\cdot a^3\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

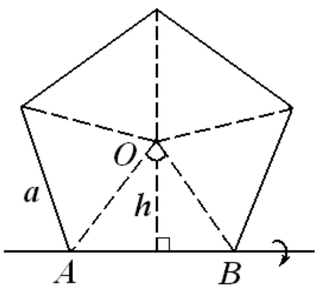

Рис. 34

Задача 8. Правильный пятиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной a. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объем (рис. 34).

Р е ш е н и е. В треугольнике AOB угол при вершине равен 72°. Высота треугольника AOB $h = \dfrac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}36^{\circ} = \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\cos 36^{\circ}}{2\sin 18^{\circ}\cos 18^{\circ}}$ есть расстояние от центра тяжести до оси. Зная, что $\cos 36^{\circ} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ и $\sin 18^{\circ} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ [15], после преобразований получаем: $h = \dfrac{a}{2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$.

Таким образом, площадь поверхности тела вращения: $F = 5\pi\cdot a^2\operatorname{ctg}36^{\circ} = 5\pi\cdot a^2\sqrt{1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$, а объем тела вращения равен $V = \dfrac{5\pi}{4}\cdot a^3\operatorname{ctg}^2 36^{\circ} = \dfrac{5\pi}{4}\cdot a^3\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

На примере этой и предыдущих задач можно убедиться в том, что применение этих теорем позволяет экономить время.

Задача 9. Определите ординату центра тяжести пластинки, ограниченной линиями $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ и осью Ox.

Р е ш е н и е. Имеем $S=\int\limits_0^{\pi}\sin x dx=2$, объем тела вращения вокруг оси Ох $V_x=\pi\int\limits_0^{\pi}y^2dx=\frac{\pi^2}{2}$. Ордината центра тяжести пластинки $y_c=\frac{\pi}{8}$.

Задача 10. Определите координаты центра тяжести пластинки, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, x = 1, x = 4, y = 0 (рис. 35). Найдем площадь пластинки и объем тела вращения вокруг оси Оx.

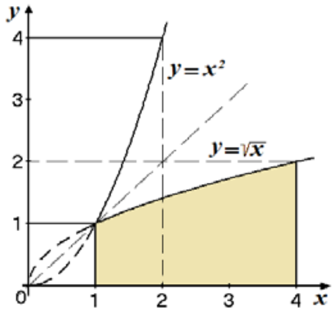

Рис. 35

Р е ш е н и е. Имеем $S=\int\limits_1^{4}\sqrt{x}dx=\frac{14}{3}$ и

$V=\pi\int\limits_1^{4}xdx=\frac{15\pi}{2}$. Таким образом, получаем ординату центра тяжести пластинки $y_c=\frac{45}{56}$.

Для нахождения абсциссы рассмотрим вращение вокруг оси Оx пластинки, ограниченной графиком обратной функции. В этом случае объем тела вращения находим, вычитая из объема большого цилиндра объем малого цилиндра и объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=x^2$, x = 1, x = 2, y = 0: $V=32\pi-\pi-\pi\int\limits_1^{2}x^4dx=\frac{124\pi}{5}$. Таким образом, получаем абсциссу центра тяжести пластинки: $x_c=\frac{93}{35}=2\frac{23}{35}$.

О т в е т: $x_c=\frac{93}{35}=2\frac{23}{35}$.

Количество задач на применение теорем Паппа — Гюльдена можно увеличить в несколько раз. Считаем, что эти задачи школьного уровня должны быть представлены, по меньшей мере, в классах физико-математического профиля.

1.5. Стереометрическое задание в ЕГЭ

Задание 1. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 8. Высота призмы равна 3. Точка N — середина ребра A_1C_1 (рис. 36).

А. Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

Б. Найдите площадь этого сечения.

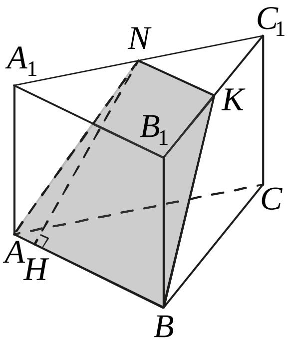

Рис. 36

Решение. А. Проведем через точку N прямую, параллельную прямой AB до пересечения с прямой B_1C_1 в точке K. Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.

Б. Имеем $A_1N = 4$, так как точка N — середина ребра A_1C_1. Значит, $AN = \sqrt{16+9} = 5$.

Далее $NK = 3$ как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$. Опустим из точки N высоту NH на сторону AB. Имеем $AH = \dfrac{AB - NK}{2} = 2$. Высота $NH =$ $= \sqrt{AN^2 - AH^2} = \sqrt{21}$.

Следовательно, искомая площадь сечения равна $\dfrac{AB+NK}{2} \cdot NH = \dfrac{8+4}{2} \cdot \sqrt{21} = 6\sqrt{21}$.

Ответ: $6\sqrt{21}$.

Критерии оценивания:

«2» — имеется верное доказательство утверждения пункта А и обоснованно получен ответ в пункте Б.

«1» — имеется верное доказательство утверждения пункта А; обоснованно получен верный ответ в пункте Б.

«0» — решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Максимальный балл — «3».

Задание 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$.

А. Докажите, что плоскость BDD_1 перпендикулярна отрезку AC.

Б. Найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

Решение. А. 1. $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата), $BB_1 \perp (ABC) \Rightarrow BB_1 \perp AC$.

2. Две пересекающиеся прямые плоскости BB_1 и $BD \perp AC$, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AC \perp (BDD_1)$.

Б. $\operatorname{tg} \angle D_1OD = \dfrac{DD_1}{OD} = \dfrac{4}{\frac{6\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{8}{6\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

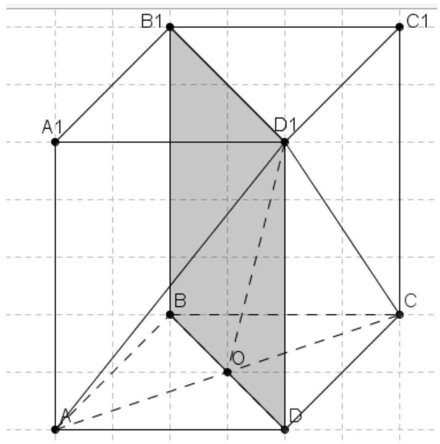

Рис. 37

Угол между прямыми в пространстве

Определение. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Справедливо и обратное утверждение. Сформулируйте его. Сделайте чертежи, иллюстрирующие прямую и обратную теоремы о трех перпендикулярах.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум пересекающим прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Задание 1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точки E и F — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1 (рис. 38).

Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

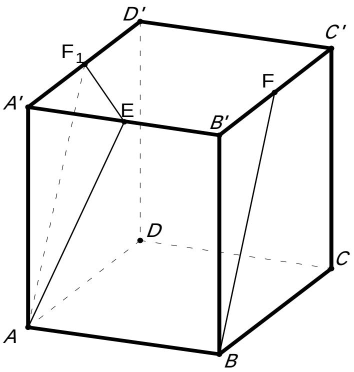

Рис. 38

Почему мы рассматриваем ΔAEF_1? Искомый угол?

Прокомментируйте теорему косинусов в ΔAEF_1:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Ответ: 0,8.

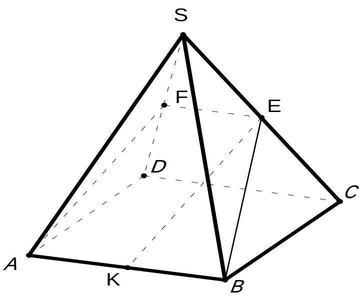

Рис. 39

Задание 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F — середины ребер соответственно SC и SD. Найдите косинус угла между прямыми AF и BE.

Объясните, почему искомый угол — KEB?

Как его найти?

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Угол между прямой и плоскостью

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и проекцией этой прямой на плоскость.

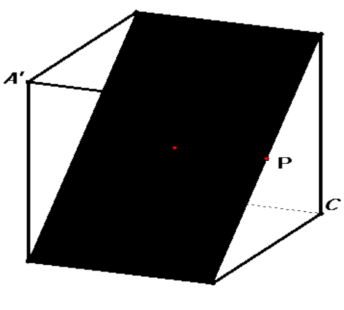

Рис. 40

Задание 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой DB_1 и плоскостью ABC_1.

$DB' \cap ABC' = O$;

$B'P \perp ABC'$;

$\Delta OB'P : \angle P = 90°$, $\angle B'OP$ — искомый.

Объясните, почему $\operatorname{tg} B'OP = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Задание 2. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}$, $MC = 25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AM и BC.

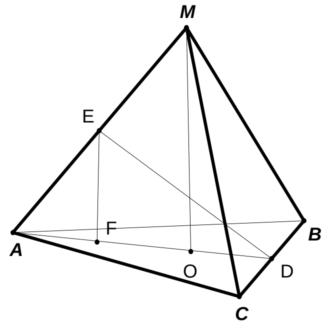

Рис. 41

Решение. Пусть D и E — середины ребер CB и AM соответственно. Так как пирамида правильная, то $AD \perp CB, MD \perp CB.$ Тогда $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = 7$, $OD = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{7}{2}$, $FD = FO + OD = 7$. $MO = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$, $EF = 12$; $\operatorname{tg} EDF = \dfrac{EF}{FD} = \dfrac{12}{7}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{12}{7}$.

Угол между плоскостями в пространстве

Определение 1. Двугранным углом в пространстве называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.

Определение 2. Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Определение 3. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Задание 1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между плоскостями AFD_1 и CDF_1.

Почему искомый угол $\angle ANA_1$?

Как найти отрезок A_1N ?

Почему $A_1C = 2$?

Почему ΔANA_1 — равносторонний?

Ответ: 60.

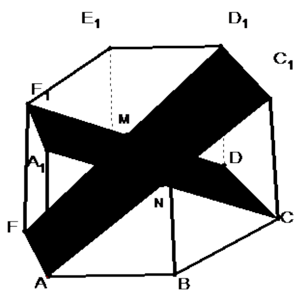

Рис. 42

Задание 2. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF*, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями *ABC* и *SEF* (рис. 43).

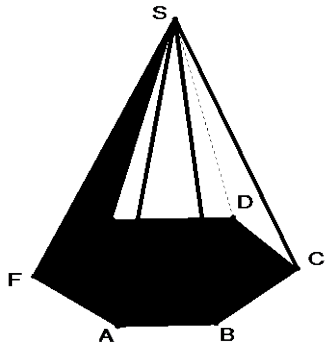

Рис. 43

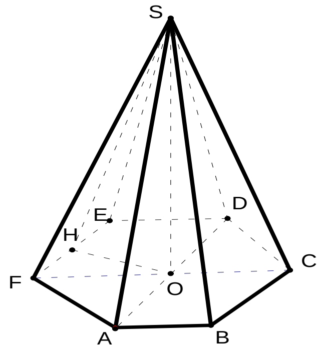

Рис. 44

Как построили точку *H*?

Искомый угол $\angle SHO$.

Решение. 1. Рассмотрим ΔFOE. Он равносторонний (почему?). *OH* — высота в равностороннем треугольнике со стороной 1 (рис. 44). Значит, $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (почему? Распишите подробнее).

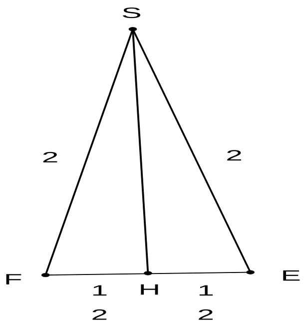

Рис. 45

2. Рассмотрим ΔSFE (рис. 45). Тогда по теореме Пифагора в ΔFSH:

$$SH = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

3. $$\cos SHO = \frac{HO}{SH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Расстояние от точки до прямой

Определение. Расстоянием от точки до прямой, не проходящей через эту точку, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

Задание 1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *B* до прямой A_1F_1 (рис. 47).

Р е ш е н и е. Так как $BE \parallel A_1F_1$, то BEA_1F_1 — равнобедренная трапеция (рис. 46).

Искомое расстояние есть высота равнобедренной трапеции, например A_1H .

Объясните, почему $BA_1 = \sqrt{2}$ и $BE = 2$?

Вам поможет чертеж равнобедренной трапеции $BAFE$.

Тогда $A_1H = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

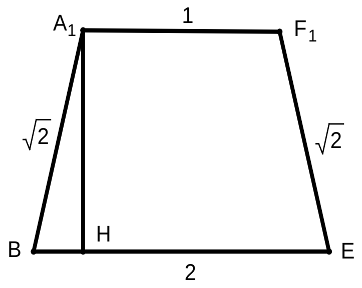

Рис. 46

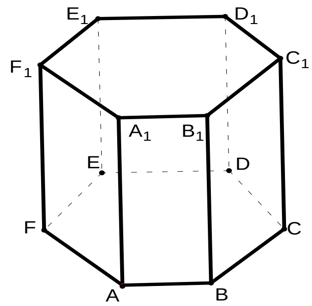

Рис. 47

О т в е т: $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Задание 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = \sqrt{6}$, высота пирамиды $\sqrt{33}$. Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно.

Р е ш е н и е. $KPMT$ — трапеция (рис. 48). Докажите данный факт.

KH — искомое расстояние.

$KT = \sqrt{6}$, $PM = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $SC = 6$, $MT = 3$ (объясните почему?).

Используя формулу площади ΔKMT и вычислив высоту трапеции, получаем:

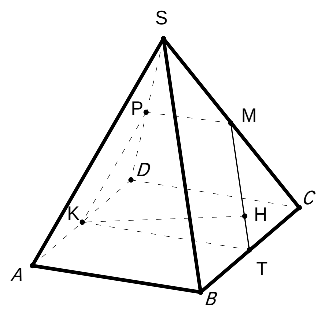

Рис. 48

$$\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{8}} = 3 \cdot KH, \quad KH = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{69}}{2\sqrt{2} \cdot 3}, \quad KH = \frac{\sqrt{23}}{2}.$$

Расстояние от точки до плоскости

Определение. Расстоянием от точки до плоскости, не проходящей через эту точку, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Расстояние от точки M до плоскости α равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α.

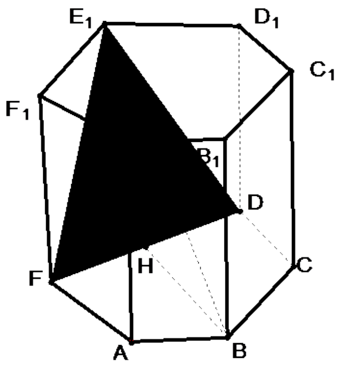

Рис. 49

Задание 1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости DFE_1 (рис. 49).

Решение. Рассмотрим ΔE_1HB. Пусть h — высота из точки B на сторону E_1H. Прокомментируйте формулу $BH \cdot BE_1 \cdot \sin EBE_1 = E_1H \cdot h$.

Подставим числовые значения и вычислим.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Задание 2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости SDF.

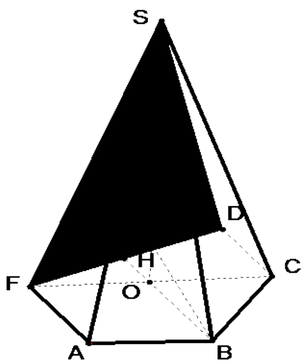

Рис. 50

Решение. Искомое расстояние — BP (объясните почему?).

Рассмотрим ΔHSB. $HB = \frac{3}{2}$, $OS = \sqrt{3}$, $HS = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (прокомментируйте).

Найдите BP.

Ответ: $\frac{3\sqrt{39}}{13}$.

Расстояние между прямыми в пространстве

Определение. Расстоянием между двумя непересекающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым.

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, воспользуемся одним из приведенных ниже способов.

1. Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.

2. Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

3. Заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями.

4. Построить плоскость, перпендикулярную одной из данных прямых, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию второй прямой.

Задание 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 (рис. 51).

Р е ш е н и е. Плоскость A_1DB, содержащая A_1B, параллельна B_1C. Поэтому из любой точки прямой B_1C опускаем перпендикуляр на плоскость A_1DB. Находим расстояние HP.

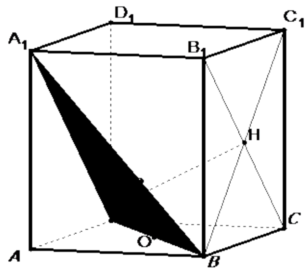

Рис. 51

1. ΔA_1DB — равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{2}$. $A_1O = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow PO = \dfrac{1}{3}A_1O = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

2. $OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. ΔPHO — прямоугольный: $PH=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{2}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задание 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми CB_1 и AB (рис. 52).

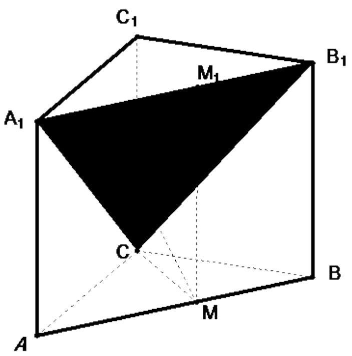

Рис. 52

Решение. Плоскость CA_1B_1, содержащая прямую CB_1, параллельна прямой AB. Значит, искомое расстояние между прямыми CB_1 и AB равно расстоянию между прямой AB и плоскостью CA_1B_1. Точка M — середина AB. $MH \perp A_1CB_1$. MH — искомое расстояние. Вычисления проведите самостоятельно.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

2. Задачи с параметрами

Методы решения задач с параметрами

1. Графические интерпретации (метод областей, преобразования графиков, параметр как переменная, геометрические идеи).

2. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств (монотонность, ограниченность, инвариантность).

2.1. Графические интерпретации

Важной частью математической культуры, необходимой для овладения методами решения нестандартных уравнений и неравенств, в том числе задач с параметром, является умение строить графики элементарных функций и использовать графические интерпретации уравнений и неравенств. Задания высокого уровня сложности КИМ ЕГЭ, связанные с параметрами, предполагают исследование взаимного расположения известных фигур — прямых, отрезков, углов, окружностей — после соответствующей интерпретации данных уравнений или неравенств.

Задача 1. Определите *a*, при каждом из которых уравнение $\left||3x|-a^2\right| = x+a$ имеет ровно три решения (рис. 53).

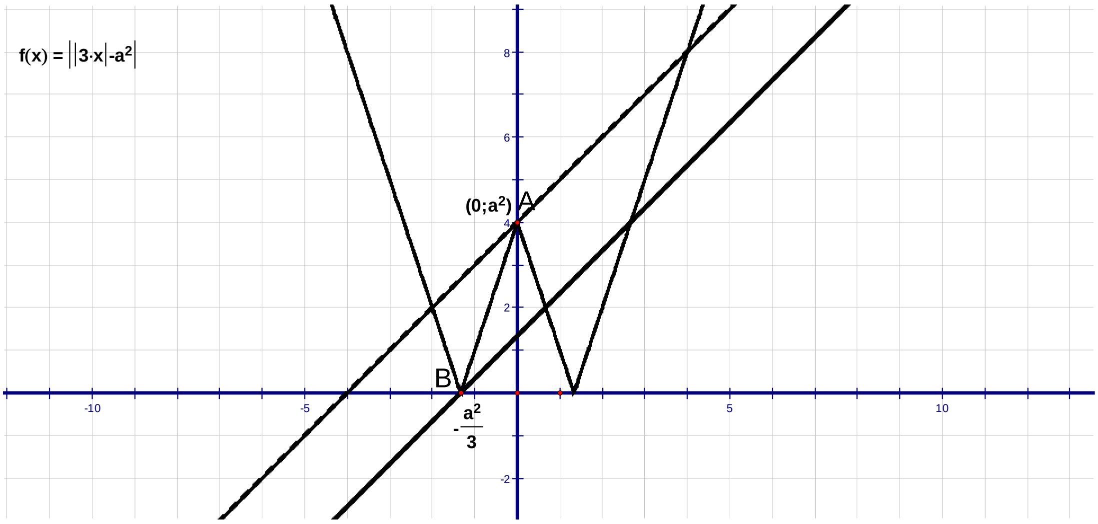

Рис. 53

Решение. При $a \neq 0$ из равенств $a = a^2$ и $a = \dfrac{a^2}{3}$ получаем $a = 1, a = 3.$

Ответ: $a = 1, a = 3.$

Задача 2. При каких *b* существует такое *k*, что уравнение $\left||x-2|-2x+1\right| = kx+b$ имеет ровно три решения?

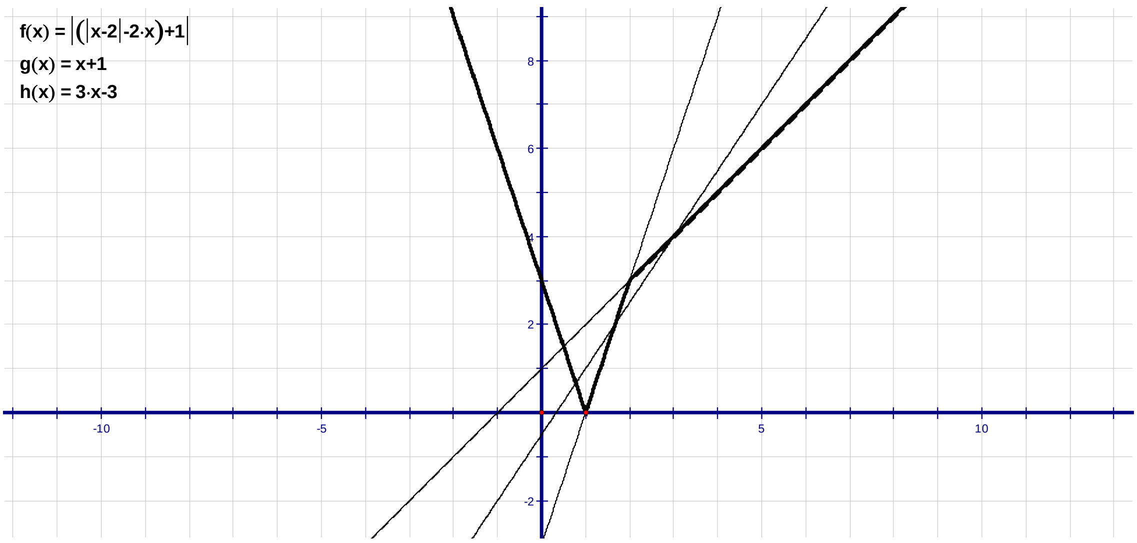

Рис. 54

Р е ш е н и е. Пусть $f(x)=\left||x-2|-2x+1\right|$, тогда $f(x)=\begin{cases}3|x-1|, x\le 2\\ |x+1|, x\ge 2\end{cases}$.

График функции f состоит из трех прямолинейных участков (рис. 54). Прямая $y=kx+b$ будет иметь с графиком функции f ровно три точки тогда и только тогда, когда она пересечет правую и среднюю части в их внутренних точках. Очевидно, что точка пересечения такой прямой с осью ординат находится между точками M (0; – 3) и N (0; 1), то есть $b\in(-3;1)$. При этих значениях b исходное уравнение будет иметь ровно три решения.

О т в е т: $b\in(-3;1)$.

Задача 3. Найдите все значения a, при каждом из которых система имеет единственное решение:

$$\begin{cases}|x+2y+1|\le 11,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем систему:

$$\begin{cases}-12\le x+2y\le 10,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a.\end{cases}$$

Первое неравенство системы задает на плоскости полосу, граница которой — пара параллельных прямых: $x+2y=10$ и $x+2y=-12$.

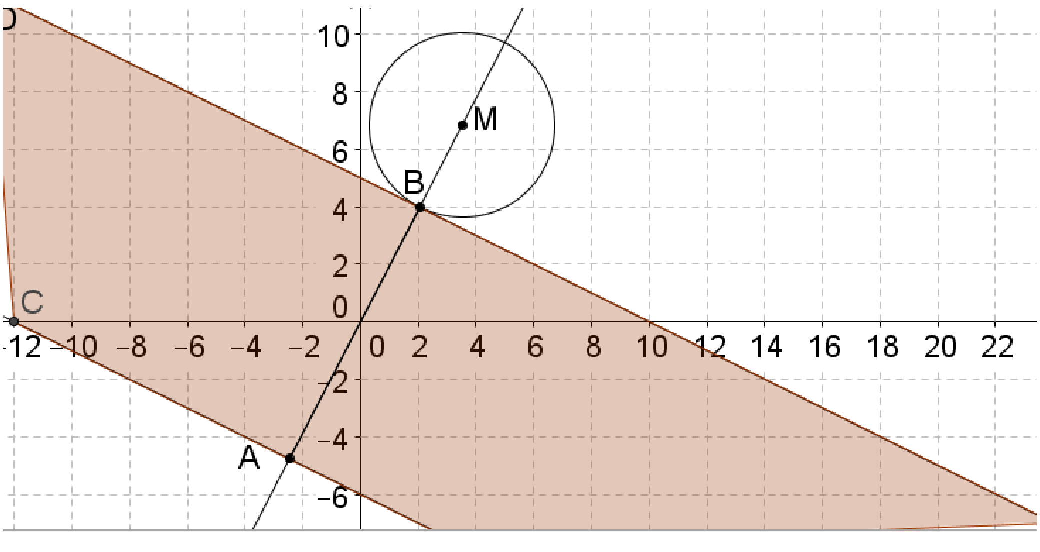

Рис. 55

Если $a < -2$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения станет отрицательной.

Если $a = -2$, то уравнение принимает вид $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 0$ и задает единственную точку (– 2; – 4), координаты которой удовлетворяют неравенству $|-2-8+1| = 9 < 11$. Следовательно, при $a = -2$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a > -2$. Тогда уравнение $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2+a$ определяет окружность радиусом $r = \sqrt{2+a}$. Центр окружности $M(a; 2a)$ лежит на прямой $y = 2x$, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A(-2{,}4; -4{,}8)$ и $B(2; 4)$. Система имеет единственное решение, только если окружность внешним образом касается полосы в точке *A* или в точке *B*. Если точка касания — точка *A*, то $a < -2{,}4$, что невозможно (рис. 55).

Окружность касается полосы внешним образом в точке *B*, только если $a > 2$ и $MB = r$.

Получаем: $(a-2)^2 + (2a-4)^2 = 2+a$;

$5a^2 - 21a + 18 = 0$.

Корни: $a = 3, a = 1{,}2$. Только корень $a = 3$ соответствует условию $a > 2$.

Ответ: – 2; 3.

Задача 4. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений имеет ровно три различных решения (рис. 56).

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = |x-a| + 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром в точке $(4; 4)$ и радиусом 3. График функции $y = |x-a| + 1$ получаем параллельным переносом из графика $y = |x|$. Поскольку данный график представляет собой прямой угол с вершиной в точке $(0;0)$ и сторонами, лежащими на прямых

$y = x$ и $y = -x$ выше оси абсцисс, то график функции $y = |x - a| + 1$ также представляет собой прямой угол, но с вершиной в точке $(a; 1)$ и сторонами, параллельными прямым $y = x$ и $y = -x$.

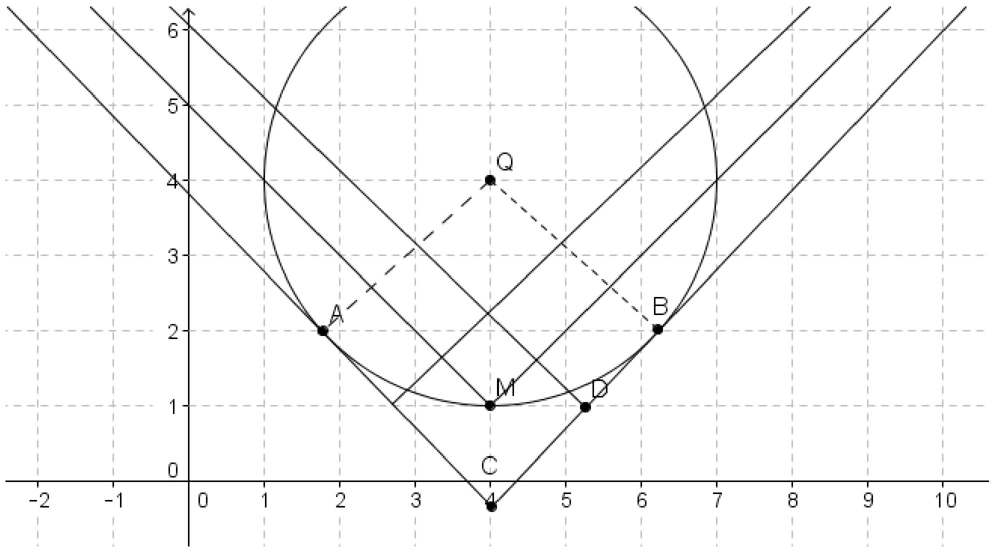

Рис. 56

Сразу же заметим, что прямая $y = 1$, на которой лежит вершина угла, является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в следующих случаях:

- вершина прямого угла лежит в точке *M* касания окружности и прямой $y = 1$, а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это возможно, только если $a = 4$;
- одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности в точке *A* или в точке *B*.

Найдите значения параметра для этих двух случаев.

Решение. Поскольку радиус окружности, проведенный в точку касания окружности и прямой, перпендикулярен прямой, четырехугольник $BQAC$ является квадратом со стороной 3 и диагональю $3\sqrt{2}$. Тогда $MD = MC = QC - QM = 3\sqrt{2} - 3$. Следовательно, для случая касания в точке *B* получаем: $a = 3\sqrt{2} - 3 + 4 = 1 + 3\sqrt{2}$. Для касания стороны угла и окружности в точке A аналогично получаем еще одно значение параметра: $a = 4-\left(3\sqrt{2}-3\right) = 7-3\sqrt{2}.$

При $a < 7-3\sqrt{2}$ или $a > 1+3\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $7-3\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 1+3\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $7-3\sqrt{2}; 4; 1+3\sqrt{2}.$

Задача 5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y^2-xy-7y+4x+12\right)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0. \\ a = x+y \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы: $y = a-x$ — семейство прямых параллельных прямой $y=-x$.

Областью определения первого уравнения является $\begin{cases} x \ge -4, \\ y < 7. \end{cases}$

Решим уравнение:

$y^2-xy-7y+4x+12=0$

$y^2-7y+12-x(y-4)=0$

$(y-3)(y-4)-x(y-4)=0$

$(y-4)(y-3-x)=0$

$y=4$ или $y=3+x$.

Итак, $\begin{cases} x=-4 \\ y=a-x \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \\ y=a-x \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+3 \\ y=a-x. \end{cases}$

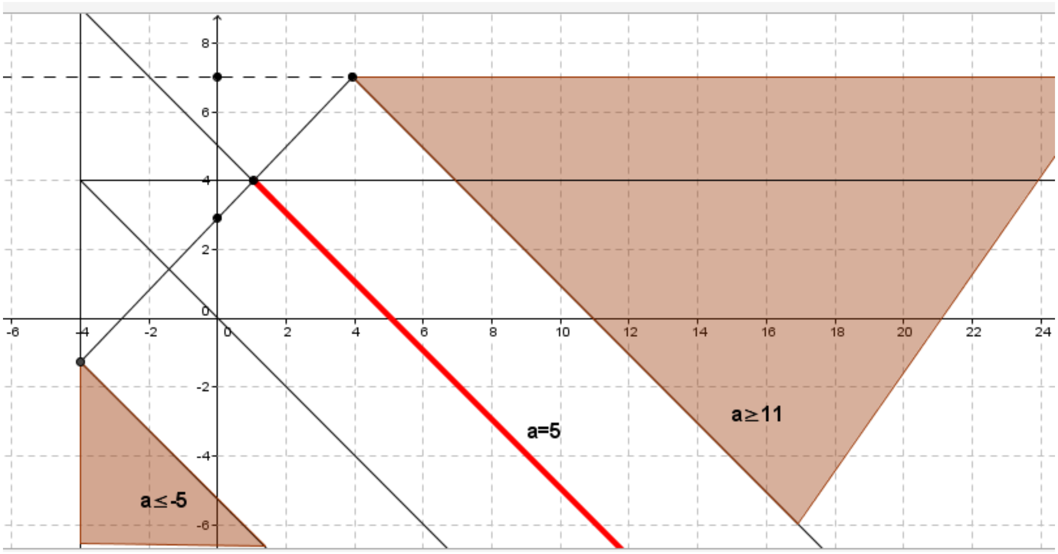

Рис. 57

О т в е т: $a \le -5; a = 5; a \ge 11$.

Задача 6. Найдите все значения a, при каждом из которых система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} y(y-7) = xy - 5(x+2) \\ x \le 6 \\ \dfrac{a(x-6)-2}{y-2} = 1 \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим первое уравнение системы:

$$y^2 - 7y = xy - 5x - 10$$

$$y^2 - 7y + 10 = x(y-5)$$

$$(y-2)(y-5) = x(y-5)$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = x + 2. \end{array}\right.$$

Упростим третье уравнение системы: $y = ax - 6a$; $y \ne 2$.

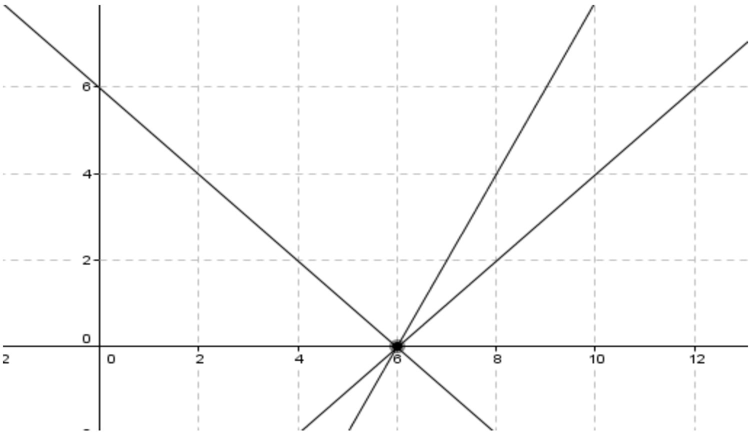

Рис. 58

Характеристическая точка (6; 0):

$y = ax - 6a$ $\qquad\qquad$ $y = ax - 6a$

$(3;\,5)$ $\qquad\qquad$ $(0;\,2)$

$5 = -3a$ $\qquad\qquad$ $a = -\dfrac{1}{3}.$

$a = -\dfrac{5}{3}.$

Ответ: $a = -\dfrac{5}{3};\ a = -\dfrac{1}{3};\ 0 \le a < 1.$

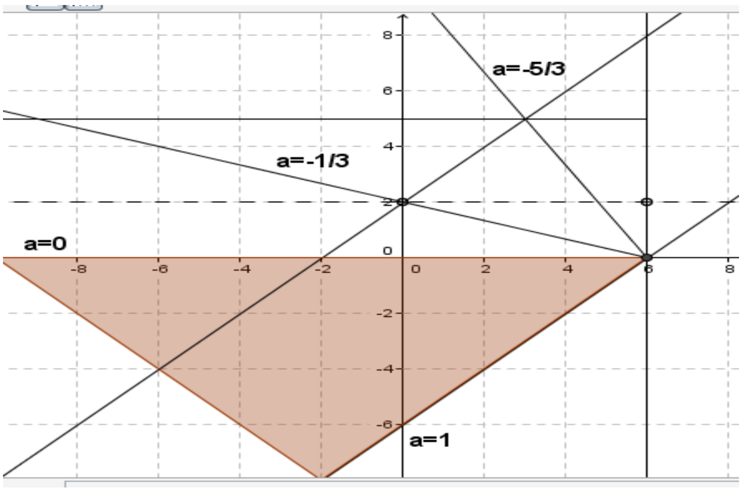

Рис. 59

2.2. Применение свойств функций

1. Найдите все значения a, при которых уравнение имеет ровно два решения:

$$\left(\log_2(x+a) - \log_2(x-a)\right)^2 - 3a\left(\log_2(x+a) - \log_2(x-a)\right) + 2a^2 - a - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Пусть $t=\log_2(x+a)-\log_2(x-a)$, тогда уравнение запишется в виде: $t^2-3at+2a^2-a-1=0$. Откуда $t=a-1$ или $t=2a+1$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=a-1$ или $\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=2a+1$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=b$ в зависимости от a и b.

При $a\neq 0$ и $x>a$ и $x>-a$, то есть при $x>|a|$, левая часть определена и принимает вид: $\log_2\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\log_2\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$.

При $x>|a|$ выражение $1+\frac{2a}{x-a}$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(1;+\infty)$ для $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;1)$ для $a<0$. Значит, при $x>|a|$ выражение $\log_2\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;+\infty)$ при $a>0$; принимает по одному разу все значения из промежутка $(-\infty;0)$ при $a<0$.

Таким образом, уравнение $\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=b$ имеет одно решение при $ab>0$ и не имеет решений при $a\neq 0$ и $ab\leq 0$.

При $a=0$ и $x>0$ уравнение принимает вид: $0=b$ и либо имеет бесконечно много решений, либо не имеет решений.

Уравнения $\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=a-1$ и $\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=2a+1$ могут иметь общие решения при $a-1=2a+1$, то есть при $a=-2$. При $a=-2$ оба уравнения принимают вид: $\log_2(x-2)-\log_2(x+2)=-3$ и имеют одно решение.

При других значениях a исходное уравнение имеет два решения, если оба уравнения $\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=a-1$ и $\log_2(x+a)-\log_2(x-a)=2a+1$ имеют по одному решению. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}(a-1)a>0\\(2a+1)a>0,\end{cases}$$

то есть $a<-\frac{1}{2}$; $a>1$. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a<-2$; $-2<a<-\frac{1}{2}$; $a>1$.

Ответ: $(-\infty;-2)$; $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$; $(1;+\infty)$.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение. Рассмотрим функции $f(x)=ax-2$ и $g(x)=\left|\frac{5}{x}-3\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны. Следовательно, при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0;\frac{5}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0;\frac{5}{3}\right]$.

Причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{5}{3}\right)\ge g\left(\frac{5}{3}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{5}{3}-2\ge 0$, то есть $a\ge\frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид: $ax-2=3-\frac{5}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-5x+5=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=25-20a$, поэтому при $a>\frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0<a<\frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня: x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{5}{4}$, то больший корень $x_2=\frac{5+\sqrt{D}}{2a}>\frac{5}{2a}>2>\frac{5}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда $a\left(x_1-\frac{5}{3}\right)\left(x_2-\frac{5}{3}\right)=a\left(\frac{5}{3}\right)^2-5\cdot\frac{5}{3}+5=\frac{25a-30}{9}>0$, то есть $a>\frac{6}{5}$.

Таким образом, уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет следующее количество корней:

— нет корней при $a\le 0$;

— один корень при $0<a<\frac{6}{5}$ и $a>\frac{5}{4}$;

— два корня при $a=\frac{6}{5}$ и $a=\frac{5}{4}$;

— три корня при $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$.

Литература

1. Алгебра и начала анализа : сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы / под ред. С. А. Шестакова. — М. : Внешсигма-М, 2004.

2. *Апанасов, П. Т.* Сборник математических задач с практическим содержанием / П. Т. Апанасов, Н. П. Апанасов. — М. : Просвещение, 1987.

3. *Атанасян, Л. С.* Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класс / Л. С. Атанасян [и др.]. — М. : Вита-Пресс, 2002.

4. *Атанасян, Л. С.* Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 класс / Л. С. Атанасян [и др.]. — М. : Вита-Пресс, 2002.

5. *Башмаков, М. И.* Математика. Практикум по решению задач / М. И. Башмаков. — М. : Просвещение, 2005.

6. *Виленкин, Н. Я.* Алгебра и математический анализ для 10 класса : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М. : Просвещение, 1997.

7. *Виленкин, Н. Я.* Алгебра и математический анализ для 11 класса : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М. : Просвещение, 1996.

8. *Виленкин, Н. Я.* За страницами учебника математики. Арифметика. Алгебра. Геометрия : кн. для учащихся 10—11 классов общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М. : Просвещение, 1996.

9. *Галицкий, М. Л.* Углубленное изучение алгебры и математического анализа : методические рекомендации и дидактические материалы / М. Л. Галицкий, М. М. Мошковия, С. И. Шварцбурд. — М. : Просвещение, 1997.

10. *Гиндикин, С. Г.* Рассказы о физиках и математиках / С. Г. Гиндикин. — М. : Просвещение, 1981.

11. *Гордин, Р. К.* ЕГЭ 2015. Математика. Задача 18. Геометрия. Планиметрия / Р. К. Гордин ; под ред. И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2015.

12. *Дорофеев, Г. В.* Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс : экспериментальное пособие / Г. В. Дорофеев [и др.]. — М. : Дрофа, 2001.

13. *Дроздов, В.* Пять окружностей / В. Дроздов // Квант. — 2014. — № 5—6. — С. 50—52.

14. ЕГЭ 2015. Математика : сборник тренировочных работ / И. Р. Высоцкий [и др.]. — М. : МЦНМО, 2015.

15. ЕГЭ 2015. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. — М. : Экзамен, 2015.

16. *Канель-Белов, А. Я.* Как решают нестандартные задачи. 60-я Московская математическая олимпиада : подготовительный сборник / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. — М. : МЦМНО, 1997.

17. *Киселев, А. П.* Геометрия. Стереометрия: 10—11 классы : учебник и задачник / А. П. Киселев, Н. А. Рыбнин. — М. : Дрофа, 1995.

18. *Кущенко, В. С.* Сборник конкурсных задач по математике / В. С. Кущенко. — Л. : Судпромгиз, 1960.

19. *Малышев, И. Г.* О важности тригонометрии как раздела геометрии / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2010. — № 8. — С. 52—54.

20. *Никольский, С. М.* Алгебра и начала анализа.11 класса / С. Н. Никольский [и др.]. — М. : Просвещение, 2003.

21. Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы / под ред. С. А. Шестакова. — М. : АСТ; Астрель, 2004.

22. *Сергеев, И. Н.* ЕГЭ 2010. Математика. Задача С3 / И. Н. Сергеев, В. С. Панферов ; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2010.

23. *Смирнов, В. А.* ЕГЭ 2015. Математика. Задача 16 / В. А. Смирнов; под ред. И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2015.

24. *Терешин, Н. А.* Прикладная направленность школьного курса математики : книга для учителя / Н. А. Терешин. — М. : Просвещение, 1990.

25. *Тихов, М. С.* 125 занятий по математике с одаренными детьми / М. С. Тихов. — Н. Новгород : ННГУ, 1999.

26. Математика в школе. — 2010. — № 8.

27. Там же. — 2012. — № 2, 3.

28. Там же. — 2014. — № 1, 7.

29. Там же. — 2015. — № 4.

30. http://www.mathege.ru.

Содержание

ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ
ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС ДЛЯ 10—11 КЛАССОВ

Методическое пособие

Редактор Н. А. Елизарова
Корректор О. В. Панова
Компьютерная верстка Т. С. Родинко

Оригинал-макет подписан в печать 28.03.2016 г.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 15,8. Тираж 100 экз. Заказ 2323.
ГБОУ ДПО «Нижегородский институт развития образования»
603122, Н. Новгород, ул. Ванеева, 203.
www.niro.nnov.ru

Отпечатано в издательском центре учебной
и учебно-методической литературы ГБОУ ДПО НИРО