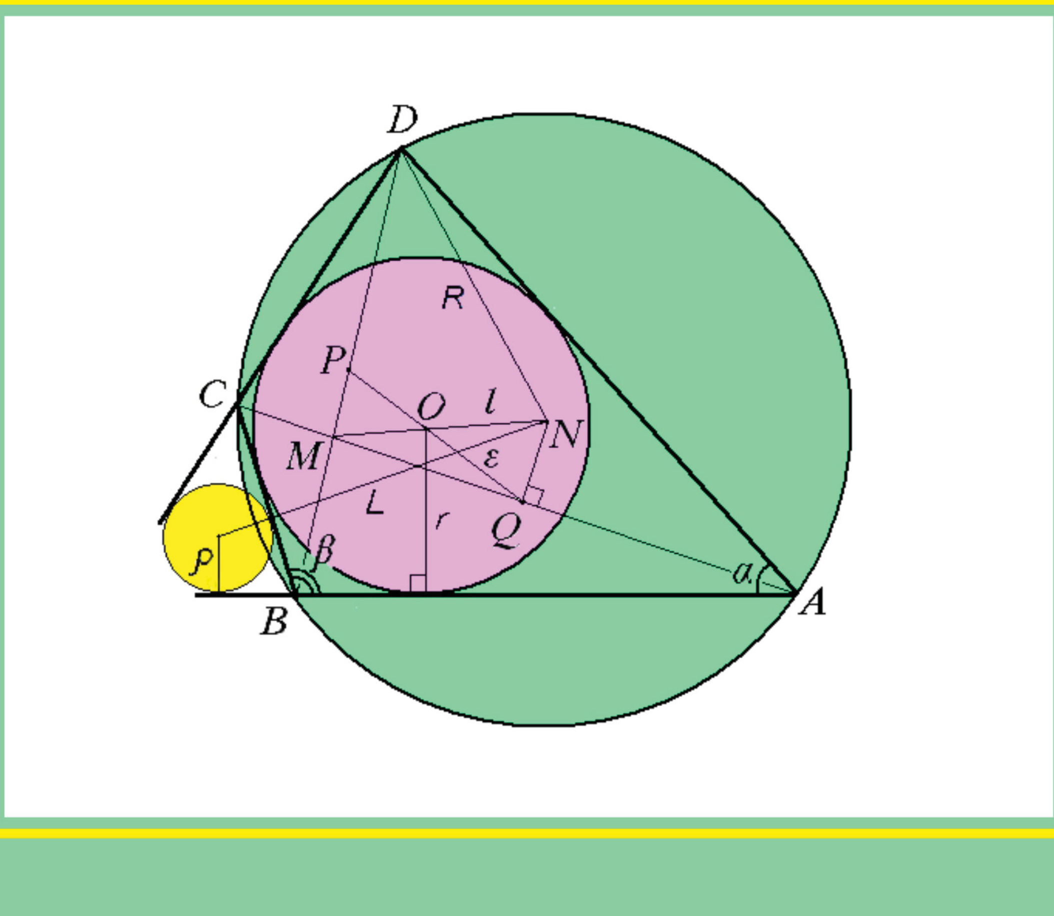
И. Г. Малышев

Геометрия вписанных и описанных четырехугольников

Учебное пособие



Элективный курс для классов с углубленным изучением математики

Государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

И. Г. Малышев

Геометрия вписанных и описанных четырехугольников

Элективный курс для классов с углубленным изучением математики

Учебное пособие

Нижний Новгород
Нижегородский институт развития образования
2019

УДК 372.851
ББК 74.262.21-242
М20

А в т о р :

И. Г. Малышев,
канд. техн. наук, доцент,
заведующий кафедрой теории и методики обучения математике
ГБОУ ДПО «Нижегородский институт развития образования»

Рекомендовано к изданию
научно-методическим экспертным советом ГБОУ ДПО НИРО

Малышев, И. Г.

М20 Геометрия вписанных и описанных четырехугольников. Элективный курс для классов с углубленным изучением математики : учебное пособие / И. Г. Малышев. — Н. Новгород : Нижегородский институт развития образования, 2019. — 62 с.

ISBN 978-5-7565-0791-1

Предлагаемый элективный курс содержит теоретические и дидактические материалы по геометрии четырехугольников. Курс основан на материалах статей автора и содержит совершенно новые теоремы и формулы для четырехугольников. В большей степени данное пособие является приложением тригонометрии в элементарной геометрии. В силу сложности тригонометрических преобразований материал курса будет наиболее интересен учащимся классов с углубленным изучением математики и, несомненно, учителям математики и обучающимся старших классов.

УДК 372.851
ББК 74.262.21-242

ISBN 978-5-7565-0791-1

Содержание

Предисловие

Геометрия считается трудным предметом. А трудность ее состоит в том, что по сравнению с алгеброй геометрия менее алгоритмизирована. Практически каждую содержательную задачу можно решить несколькими способами, используя различные методы. Поэтому геометрия содержит в себе огромный потенциал для развития гибкости ума, пластичности мышления и конструктивных способностей учащихся, воспитания у них чувства прекрасного. В ходе реформы школьного математического образования начиная еще с 70-х годов XX века были допущены существенные просчеты и перегибы. Со страниц школьных учебных пособий по геометрии исчезли многие замечательные геометрические факты. Например, бóльшая часть геометрии четырехугольников не вошла в школьный курс математики. Данное пособие призвано возродить интерес к элементарной геометрии, содержащей яркие геометрические сведения, не вошедшие в современный школьный учебник. За основу данного элективного курса взято содержание 11 статей автора, опубликованных в различных журналах. Темой большинства статей является описанный четырехугольник. Некоторые теоремы и формулы, приведенные в пособии, получены за последние три года, в результате чего большая часть материала является новой. Пособие предназначено для учащихся математических классов, а также адресовано всем, кто желает расширить и углубить знания по элементарной геометрии.

ГЛАВА I
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ГЕОМЕТРИИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

§ 1. Формулы Эйлера

1. Формула Эйлера для четырехугольника

Пусть *x, y, z, t* — отрезки диагоналей четырехугольника со сторонами *a, b, c, d*; угол между диагоналями φ, *P* — середина *AC*, а *Q* — середина *BD* (смотри рис. 1), тогда $OP = \frac{x+z}{2} - x = \frac{z-x}{2}$ и $OQ = \frac{t-y}{2}$. Теорема косинусов для ΔOPQ имеет вид:

$$PQ^2 = \left(\frac{t-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t-y}{2}\right)\left(\frac{z-x}{2}\right)\cos\varphi,$$

или

$$4PQ^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2ty - 2xz + 2\left(tx + yz - yx - zt\right)\cos\varphi.$$

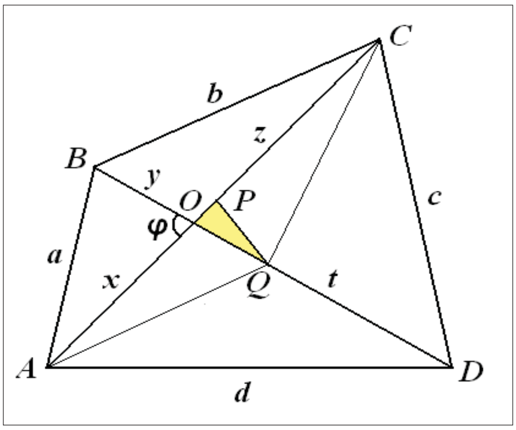


Рис. 1

Введем в рассмотрение треугольники *AOB*, *AOD*, *BOC*, *COD*.

Для них выполняются равенства: $\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi \\ b^2 = y^2 + z^2 + 2yz\cos\varphi \\ c^2 = z^2 + t^2 - 2zt\cos\varphi \\ d^2 = x^2 + t^2 + 2xt\cos\varphi \end{cases}$, из которых следует, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2(yz + xt - zt - xy)\cos\varphi$.

Вычитая одно выражение из другого, получаем формулу Эйлера:

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4PQ^2}.$$

В случае параллелограмма $PQ = 0$, $a = c$, $b = d$, и тогда приходим к известной формуле: $\boxed{d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)}$.

Этим выражением можно воспользоваться для более простого получения формулы Эйлера. А именно, если считать треугольник ABD как половину соответствующего параллелограмма, то $a^2 + d^2 = 2\left(QB^2 + AQ^2\right)$. Аналогично, считая треугольник BCD половиной параллелограмма, имеем $b^2 + c^2 = 2\left(QC^2 + BQ^2\right)$. Таким образом, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4BQ^2 + 2(AQ^2 + CQ^2)$. Теперь считаем треугольник ACQ половиной параллелограмма. В этом случае: $AQ^2 + CQ^2 = 2(PQ^2 + AP^2)$.

Учитывая, что $4BQ^2 = d_2^2$, $4AP^2 = d_1^2$, получаем формулу Эйлера.

Попарно складывая и вычитая в той же системе из четырех равенств, можно получить следующее выражение:

$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = (xy + zt + yz + xt)2\cos\varphi = 2(x+z)(y+t)\cos\varphi$,

откуда окончательно имеем формулу: $\boxed{b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2\, d_1 d_2 \cos\varphi}$.

Можно ввести в формулу знак модуля. Однако здесь принято, что угол лежит напротив стороны a. Если угол будет больше 90 градусов, то и в этом случае формула остается в неизменном виде, так как знак правой части формулы соответствует знаку левой части.

В данной формуле скрыта следующая **теорема:**

Диагонали четырехугольника принадлежат перпендикулярным прямым тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

Рассмотрим площади треугольников, на которые диагонали делят четырехугольник. Для удобства введем следующие обозначения: $S_{ABO} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$, $S_{AOD} = S_4$.

Так как $S_1 \cdot S_3 = \frac{1}{4} xyzt \sin^2 \varphi$, то получаем равенство: $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

В таком случае вся площадь $S = S_1 + S_3 + S_2 + S_4 = \frac{(S_1 + S_4)(S_3 + S_4)}{S_4}$.

Это означает, что площадь четырехугольника равна $\boxed{S = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{BM \cdot CK}{ON}}$,

где *BM*, *ON*, *CK* — высоты, опущенные на основание *AD* (смотри рис. 2).

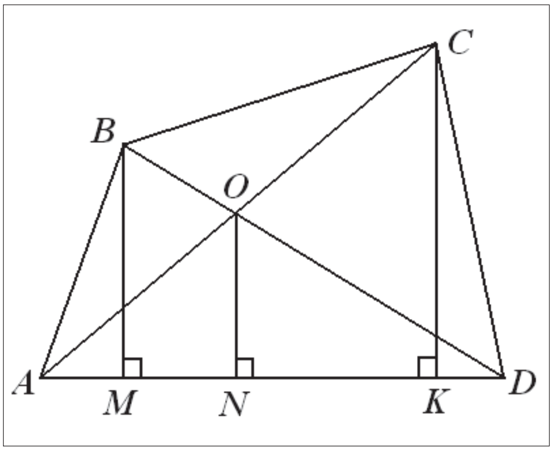


Рис. 2

Эта формула похожа на известную формулу для треугольников, только роль высоты выполняет некая средняя высота четырехугольника $\frac{BM \cdot CK}{ON}$.

Возвращаясь к рисунку 1, определим площадь треугольника *OPQ*:

$$S_{OPQ} = \frac{1}{2} OP \cdot OQ \cdot \sin \varphi = \frac{1}{8} (zt + xy - zy - xt) \sin \varphi, \quad \text{или} \quad S_{OPQ} = \frac{|S_1 + S_3 - S_2 - S_4|}{4}.$$

2. Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей в треугольнике

Пусть в треугольнике *ABC* точка *O* — центр описанной окружности, точка *N* — центр вписанной окружности, угол *CBA* равен 2β, а угол *BAC* равен 2α, *R* — радиус описанной окружности, *r* — радиус вписанной окружности (смотри рис. 3). Проведены биссектрисы углов *A* и *B* до пересечения с описанной окружностью и ее диаметр *EF*.

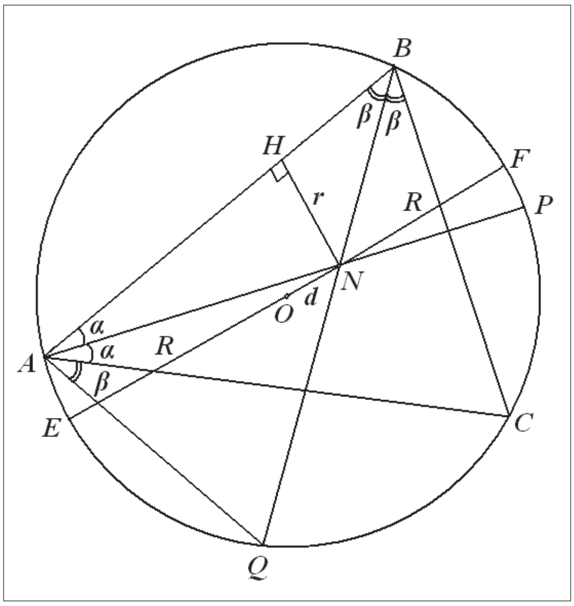


Рис. 3

По теореме о пересечении хорд имеем равенство $EN \cdot NF = BN \cdot NQ$.

Угол $NAQ = \alpha + \beta$, а угол $ANQ = \dfrac{\cup AEQ + \cup BFP}{2} = \dfrac{2\alpha + 2\beta}{2} = \alpha + \beta$.

Таким образом, треугольник ANQ — равнобедренный. Из треугольника ABQ имеем: $AQ = 2R\sin\beta$, а из треугольника HBN: $BN = \dfrac{r}{\sin\beta}$. Подставляя все отрезки в формулу с хордами, получаем равенство:

$$(R+d)(R-d) = 2R\sin\beta \cdot \frac{r}{\sin\beta}, \quad \text{или} \quad \boxed{d^2 = R^2 - 2Rr}.$$

Хотя формула относится к геометрии треугольников, она выписана здесь для сравнения в дальнейшем с подобной формулой для четырехугольников. Ее следствием является то, что в любом треугольнике радиус описанной окружности не меньше удвоенного радиуса вписанной окружности, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний.

§ 2. Формула Бретшнайдера и ее следствия

Среди общих формул для четырехугольников известна формула Бретшнайдера. Немецкий математик **Карл Антон Бретшнайдер** (1808—1878), кстати, учитель математики и географии, в 1842 году предложил интересную формулу для четырехугольников. На рисунке 4 дан четырехугольник с дополнительными построениями.

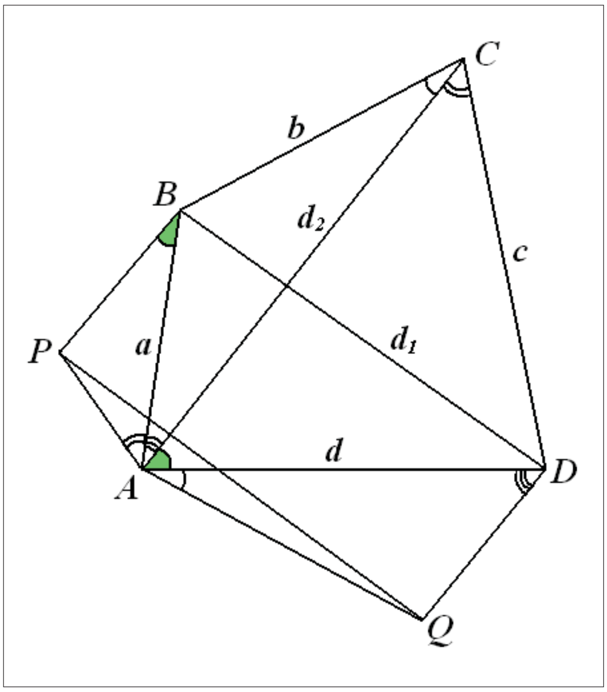


Рис. 4

Строятся треугольники, подобные исходным, а именно: треугольник ABP подобен треугольнику ACD, а треугольник AQD — треугольнику ABC. Выпишем пропорции: $\frac{BP}{d}=\frac{AP}{c}=\frac{a}{d_2}$ и $\frac{AQ}{b}=\frac{DQ}{a}=\frac{d}{d_2}$.

В результате имеем следующие соотношения для сторон этих треугольников:

$$BP=\frac{a\cdot d}{d_2};\qquad AP=\frac{a\cdot c}{d_2};\qquad AQ=\frac{b\cdot d}{d_2};\qquad DQ=\frac{a\cdot d}{d_2}.$$

В четырехугольнике $BPQD$ сумма углов $\angle PBD+\angle BDQ=\angle BAD+\angle ABD+\angle ADB=180^0$, то есть $BP\,//\,DQ$. Учитывая, что $BP=DQ$, получается, что $BPQD$ — параллелограмм.

В треугольнике APQ запишем теорему косинусов:

$$PQ^2=d_1^2=\frac{a^2c^2}{d_2^2}+\frac{b^2d^2}{d_2^2}-2\cdot\frac{abcd}{d_2^2}\cdot\cos(A+C)\,.$$

Таким образом, получаем общую формулу:

$$\boxed{d_1^2 d_2^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2\cdot abcd \cdot \cos(A+C)}.$$

У этой формулы есть несколько важных следствий.

Во-первых, фактически, это обобщенная теорема Птолемея. Действительно, из условия $A+C=180^0$ следует $\boxed{d_1d_2 = ac+bd}$, а из справедливости последнего равенства следует, что $A+C=180^0$, то есть четырехугольник вписан в окружность. Здесь же можно добавить и такое свойство четырехугольников: если сумма противоположных углов четырехугольника равна 90 либо 270 градусов, то $d_1^2d_2^2 = a^2c^2 + b^2d^2$.

Во-вторых, из формулы следует, что для любого четырехугольника выполняется неравенство:

$d_1^2d_2^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2\cdot abcd \cdot cos(A+C) \le a^2c^2 + b^2d^2 + 2\cdot abcd,$ или $d_1d_2 \le ac+bd$.

В-третьих, из формулы Бретшнайдера следует формула Стюарта для треугольника. Действительно, если рассматривать вырожденный четырехугольник (смотри рис. 5), то есть когда точка D совпадает с точкой пересечения диагоналей, а сумма углов $A+C=180^0-B$, то, подставляя в формулу Бретшнайдера значение косинуса угла B, равного $\cos B = \dfrac{a^2+b^2-d_2^2}{2ab}$, получаем цепочку равенств:

$$d_1^2(c+d)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + cd\left(a^2+b^2-d_2^2\right) = a^2c\cdot(c+d) + b^2d\cdot(c+d) - cd\cdot(c+d)^2.$$

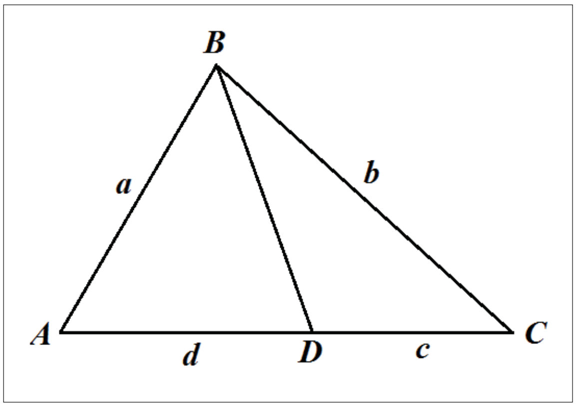


Рис. 5

Отсюда следует формула Стюарта для треугольников (на рисунке 5 и в формуле — обозначения, сохранившиеся от четырехугольника):

$$BD^2 = \frac{c}{c+d} \cdot a^2 + \frac{d}{c+d} \cdot b^2 - cd \,.$$

Наконец, если будем рассматривать площадь четырехугольника, получим еще одно следствие. Выпишем систему основных уравнений описанного четырехугольника:

$$\begin{cases} a+c=b+d \\ b^2+d^2-(a^2+c^2)=2d_1d_2\cos\varphi \\ d_1^2d_2^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\alpha+\gamma) \end{cases}$$

После возведения в квадрат первого уравнения и подстановки во второе получаем равенство $ac-bd=d_1d_2\cos\varphi$. Возведем в квадрат последнее выражение: $a^2c^2-2abcd+b^2d^2=d_1^2d_2^2(1-\sin^2\varphi)$. Учитывая, что площадь четырехугольника $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, и используя формулу Бретшнайдера, получаем следующее выражение для площади: $4S^2=2abcd-2abcd\,cos(\alpha+\gamma)$, из которого имеем формулу площади описанного четырехугольника $S=\sqrt{abcd}\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

§ 3. Теорема Брианшона и ее продолжение

Среди четырехугольников есть такие, которые не требуют уточнения, выпуклый он или невыпуклый. Это описанные четырехугольники. Известно, что центр вписанной в четырехугольник окружности лежит на пересечении биссектрис его углов. Чтобы все биссектрисы пересеклись в одной точке, необходимо выполнение критерия для сторон $a+c=b+d$.

В описанном четырехугольнике интересным свойством обладает точка пересечения диагоналей. Известна **теорема Шарля Жульена Брианшона** (1783—1864) для четырехугольника:

В описанном четырехугольнике прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, проходят через точку пересечения его диагоналей.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, найдем отношение, в котором точка пересечения диагоналей делит сами диагонали. Для этого нужно напомнить некоторые формулы площади четырехугольников. На рисунке 6 в четырехугольнике проведены перпендикуляры из двух вершин и из точки пересечения диагоналей к стороне.

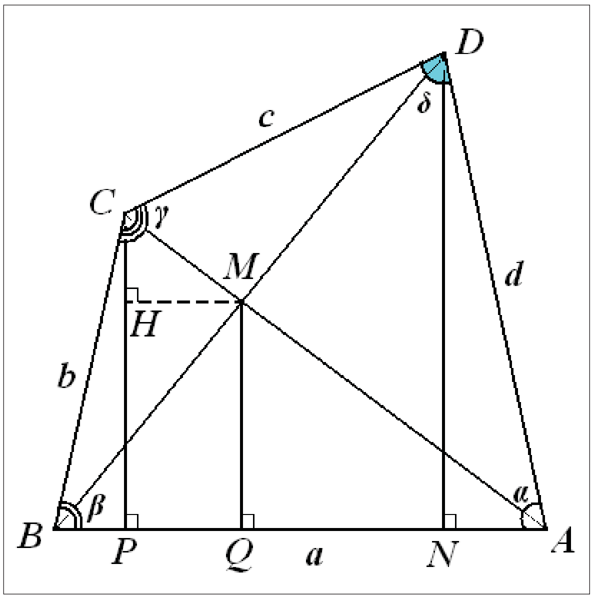


Рис. 6

Выпишем отношения площадей треугольников:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABM}} = \frac{DN}{MQ} = \frac{BD}{BM} = \frac{S_{BCD}}{S_{BCM}}.$$

Из принципа равных отношений следует, что

$$\frac{S_{ABD} + S_{BCD}}{S_{ABM} + S_{BCM}} = \frac{S}{S_{ABC}} = \frac{DN}{MQ}.$$

Таким образом, площадь четырехугольника равна

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{DN \cdot CP}{MQ} \text{ (смотри § 1).}$$

Для площади описанного четырехугольника выпишем известную формулу площади $S = \sqrt{abcd} \cdot \sin\frac{\beta + \delta}{2}$ (смотри § 2). Из рисунка 6 следует, что $DN = d \cdot \sin\alpha$ и $CP = b \cdot \sin\beta$, следовательно $S = \frac{1}{2} abd \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{MQ}$.

Таким образом, $MQ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abd}{c} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\frac{\beta+\delta}{2}}}$. Учитывая, что O — это центр вписанной окружности, выпишем все стороны четырехугольника через радиус вписанной окружности и функции углов:

$$a = r \cdot \left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} \right) = r \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}};$$

$$b = r \cdot \frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}; \quad c = r \cdot \frac{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2}}; \quad d = r \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2}}.$$

Так как треугольники CHM и MQA подобны, то отношение CM к MA можно найти из следующих формул:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{CH}{MQ} = \frac{CP - MQ}{MQ} = \frac{CP}{MQ} - 1, \quad \text{или} \quad \frac{CM}{MA} = 2\sqrt{\frac{bc}{ad} \cdot \frac{\sin\frac{\beta+\delta}{2}}{\sin\alpha}} - 1.$$

После подстановки сторон в формулу и небольших преобразований, учитывая, что $\delta + \beta = 360^0 - (\gamma + \alpha)$, окончательно получаем отношение, в котором диагонали делятся точкой пересечения в описанном четырехугольнике:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{DM}{MB} = \frac{tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\delta}{2}}.$$

Теперь вернемся к теореме Брианшона. На рисунке 7 показан описанный четырехугольник, где x, y, z, t — отрезки касательных, равные соответственно $r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$; $r \cdot ctg\frac{\beta}{2}$; $r \cdot ctg\frac{\gamma}{2}$; $r \cdot ctg\frac{\delta}{2}$, а P, Q и E, F — точки касания. Для отрезков MP и MQ в треугольниках запишем векторные равенства:

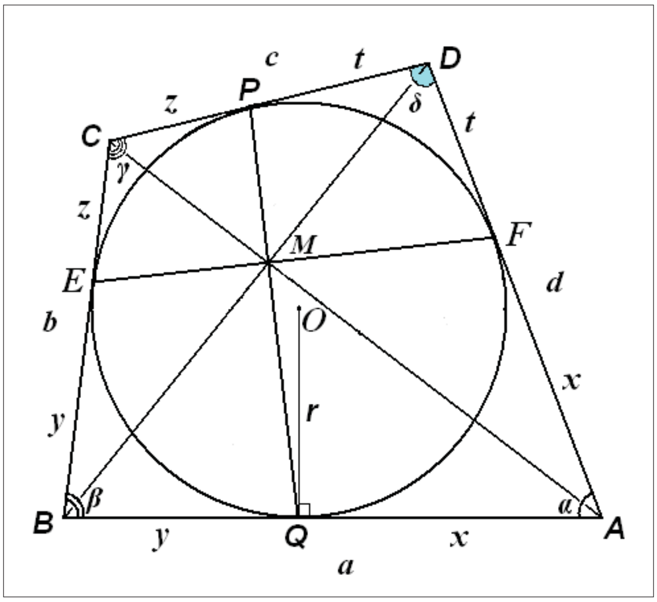


Рис. 7

$$\overrightarrow{MP} = \frac{t}{z+t} \cdot \overrightarrow{MC} + \frac{z}{z+t} \cdot \overrightarrow{MD}; \qquad \overrightarrow{MQ} = \frac{x}{x+y} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{y}{x+y} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

Перепишем эти равенства в другом виде:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{t}{z+t} \cdot \overrightarrow{CM} + \frac{z}{z+t} \cdot \overrightarrow{DM} = \frac{tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\delta}{2}} \cdot \overrightarrow{CM} + \frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\delta}{2}} \cdot \overrightarrow{DM};$$

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2}} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2}} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Воспользуемся теперь полученным ранее результатом для отношения отрезков диагоналей:

$$CM = MA \cdot \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}} \quad \text{и} \quad DM = MB \cdot \frac{tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\delta}{2}}.$$

Таким образом, выражения для векторов будут иметь вид:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{tg\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{tg\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}} \cdot \overrightarrow{MB};$$

$$\overrightarrow{MQ}=\frac{tg\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\overrightarrow{MA}+\frac{tg\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\overrightarrow{MB}.$$

Можно заметить, учитывая одинаковые знаменатели в этих формулах, что оба вектора коллинеарные и связаны равенством:

$$\overrightarrow{MQ}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\delta}{2}}\cdot\overrightarrow{PM}.$$

Следовательно, прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон четырехугольника, проходят через точку пересечения его диагоналей. Кроме того, в теореме Брианшона имеем важное продолжение. Мы получили отношение, в котором делятся отрезки, соединяющие точки касания окружности со сторонами: $\frac{MQ}{MP}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\delta}{2}}$; $\frac{MF}{ME}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$.

Рассмотрим случай трапеции, когда $\hat{C}=180^0-\beta$ и $\hat{B}=180^0-\alpha$, где α и β — углы при основании трапеции (смотри рис. 8). Отношения, в которых делятся отрезки, включая диагонали, равны: $\frac{MC}{MA}=\frac{BM}{MD}=\frac{MN}{MH}=tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}$; $\frac{ME}{MF}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

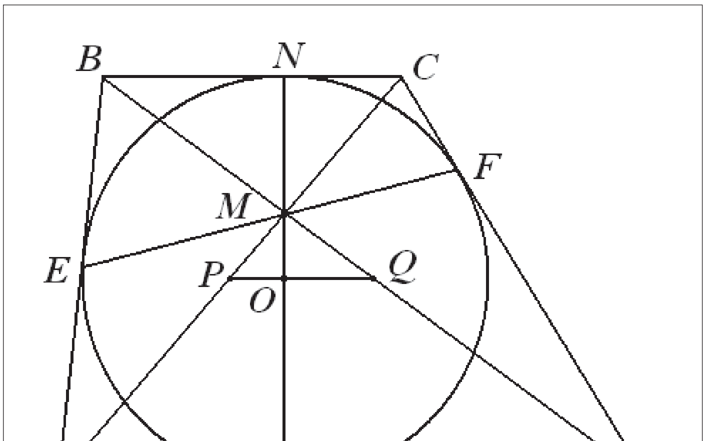


Рис. 8

Первые два равенства можно было получить и без общих формул. Учитывая, что $AD = r\cdot\left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2}\right)$; $BC = r\cdot\left(tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2}\right)$;

$AH = r\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$; $HD = r\cdot ctg\frac{\beta}{2}$, получаем те же отношения из подобия треугольников. Трапеция интересна еще и тем, что точка пересечения диагоналей и центр вписанной окружности лежат на диаметре, перпендикулярном основаниям трапеции.

Таким образом, получен новый результат, дополняющий теорему Брианшона, а также приведен один из вариантов ее доказательства. Кроме того, для описанных четырехугольников найдены соотношения, в которых диагонали делятся точкой пересечения.

§ 4. Теорема Ньютона и ее продолжение

Известно, что центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис его углов. При этом центр вписанной окружности четырехугольника обладает интересным свойством, а именно: при аккуратном построении четырехугольника выясняется, что центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины его диагоналей. Это не случайно.

Согласно **теореме Ньютона** *во всяком описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой*.

Данная теорема и ее доказательство практически нигде не представлены. Это говорит о том, что теорема либо сложная, либо не имеет принципиального характера, а может быть, и то и другое. Выберем такой способ ее доказательства, который позволит одновременно указать место расположения центра вписанной окружности. На рисунке 9 показан четырехугольник, в который вписана окружность.

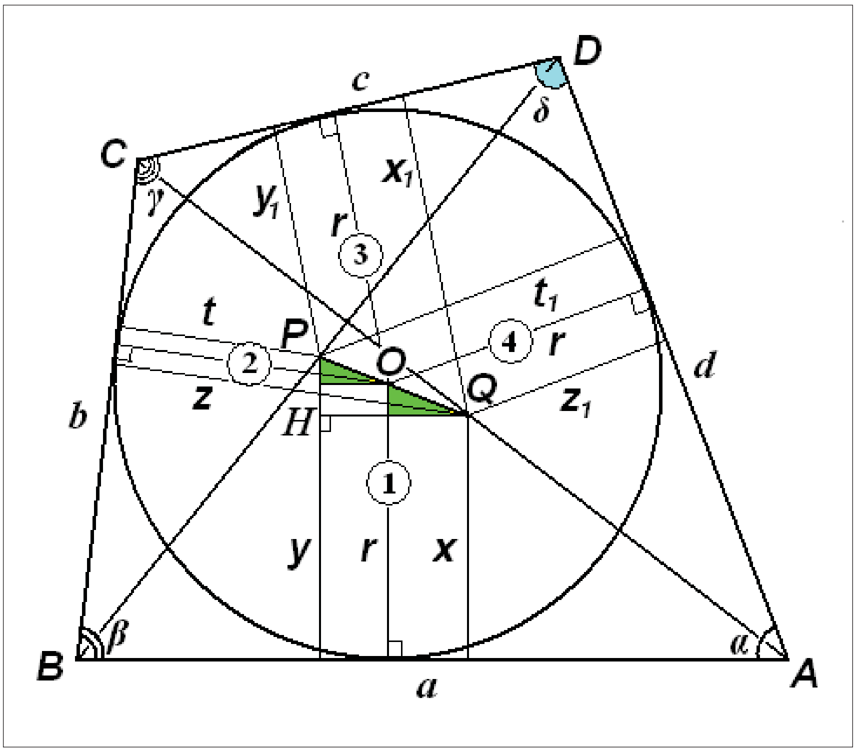


Рис. 9

Из середин диагоналей (точки P и Q) проведены перпендикуляры к его сторонам. Так получаются четыре прямоугольные трапеции с основаниями x и y; z и t; x_1 и y_1; z_1 и t_1. Так как диаметр окружности удовлетворяет неравенству $b \cdot \sin\beta < 2r < d \cdot \sin\alpha$, или $x < r < y$ (в случае трапеции неравенство может быть не строгим), то на PQ есть точка O_1, расстояние от которой до стороны a равно радиусу окружности. Это верно и для других сторон. Следовательно, на PQ возможны четыре точки, расстояние от которых до соответствующих сторон равно радиусу. Если отношение, в котором эти точки делят отрезок PQ, одно и то же, то все точки совпадают, и мы имеем центр вписанной окружности.

Длины показанных на рисунке отрезков и сторон таковы:

$$a = r \cdot \left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} \right); \qquad b = r \cdot \left(ctg\frac{\gamma}{2} + ctg\frac{\beta}{2} \right);$$

$$c = r \cdot \left(ctg\frac{\gamma}{2} + ctg\frac{\delta}{2} \right); \qquad d = r \cdot \left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\delta}{2} \right);$$

$$x=\frac{b\cdot\sin\beta}{2};\quad x_1=\frac{d\cdot\sin\delta}{2};\quad y=\frac{d\cdot\sin\alpha}{2};\quad y_1=\frac{b\cdot\sin\gamma}{2};$$

$$z=\frac{a\cdot\sin\beta}{2};\quad z_1=\frac{c\cdot\sin\delta}{2};\quad t=\frac{c\cdot\sin\gamma}{2};\quad t_1=\frac{a\cdot\sin\alpha}{2}.$$

Отметим, что эти равенства получены в предположении, что окружность вписана в четырехугольник, а центр окружности пока никак не связан с отрезком PQ.

Опустим на отрезок y перпендикуляры из точек O (для первой трапеции подразумевается O_1) и Q. В прямоугольном треугольнике HPQ имеем два подобных треугольника, отмеченных на рисунке серым цветом. Отношение их гипотенуз равно отношению их катетов:

$$\frac{PO_1}{O_1Q}=\frac{y-r}{r-x}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\delta}{2}\right)-1}{1-\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\left(ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot ctg\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}\cdot\left(-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}.$$

Так как углы связаны равенством $\alpha+\delta=360^0-(\beta+\gamma)$, то $\cos\frac{\alpha+\delta}{2}=-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$. В итоге получаем: $\frac{PO_1}{O_1Q}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}}$.

Для трех других трапеций имеем такие равенства:

$$\frac{PO_2}{O_2Q}=\frac{r-t}{z-r}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}}\cdot\left(-\frac{\cos\frac{\gamma+\delta}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}\right);$$

$$\frac{PO_3}{O_3Q}=\frac{r-y_1}{x_1-r}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}}\cdot\left(-\frac{\cos\frac{\gamma+\beta}{2}}{\cos\frac{\delta+\alpha}{2}}\right);$$

$$\frac{PO_4}{O_4Q}=\frac{t_1-r}{r-z_1}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}}\cdot\left(-\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma+\delta}{2}}\right).$$

Действительно, все четыре дроби сводятся к одному и тому же значению, а из этого следует, что все четыре точки совпадают и центр вписанной окружности четырехугольника лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей четырехугольника, и делит его в отношении $\frac{PO}{OQ}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}}$,

причем точка P лежит на диагонали BD (углы β, δ), а точка Q — на диагонали AC (углы α, γ).

В случае трапеций, когда $\gamma=180^0-\beta$ и $\delta=180^0-\alpha$, где α и β — углы при основании трапеции, отношение, в котором делится отрезок, равно $\frac{PO}{OQ}=\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\beta}{2}}$. Формула не работает для ромба и квадрата. Это связано с тем, что множители, подобные $\cos\frac{\alpha+\delta}{2}$, равны нулю и отношение не определено.

Таким образом, получен новый результат, дополняющий теорему Ньютона, а также приведен один из вариантов ее доказательства.

§ 5. Теоремы Птолемея и Симсона

Клавдий Птолемей (ок. 100 — ок. 178) — древнегреческий астроном, математик, географ. Он ввел понятия широты и долготы местности. Автор «Альмагеста» («Великого математического построения по астрономии в 13 книгах»), в котором, в частности, изложены сведения по прямолинейной и сферической тригонометрии и дана теорема о выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность. Благодаря теореме он составил таблицу хорд, которой воспользовался для астрономических вычислений.

Теорема: *Сумма произведений двух пар противоположных сторон вписанного четырехугольника равна произведению его диагоналей*:

$$\boxed{d_1d_2=ac+bd}$$

Выше была приведена формула Бретшнайдера, которая, по сути, является обобщенной теоремой Птолемея. Здесь же даны еще два доказательства прямой теоремы Птолемея.

1. Доказательство Птолемея.

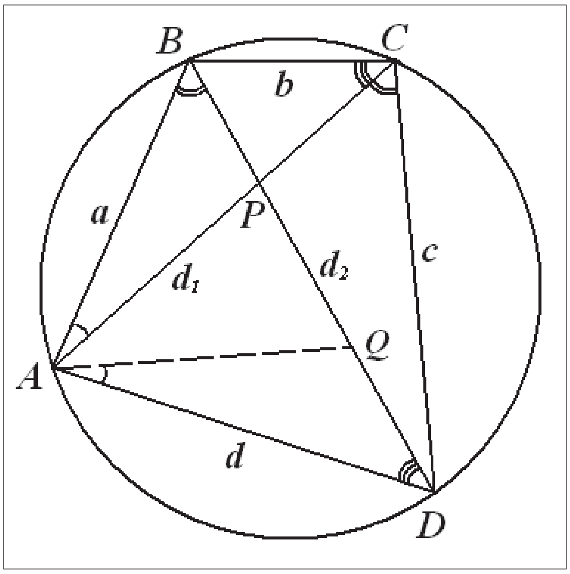


Рис. 10

Доказательство прямой теоремы связано с небольшим дополнительным построением. Проведем отрезок AQ так, чтобы углы QAD и BAC были равны. Из подобия треугольников QAD и BAC следует равенство $\frac{b}{QD}=\frac{d_1}{d}$, или $d_1 \cdot QD = bd$. Из подобия треугольников QAB и ACD следует равенство $\frac{c}{QB}=\frac{d_1}{a}$, или $d_1 \cdot QB = ac$. Сложив равенства $d_1 \cdot QD + d_1 \cdot QB = bd + ac$, получаем: $d_1 d_2 = ac + bd$.

2. Доказательство с помощью теоремы косинусов.

Запишем теорему косинусов для всех углов четырехугольника:

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-d_1^2}{2ad}; \quad \cos\beta = \frac{a^2+b^2-d_2^2}{2ab}; \quad \cos\gamma = \frac{b^2+c^2-d_1^2}{2bc}; \quad \cos\delta = \frac{c^2+d^2-d_2^2}{2cd}.$$

Учитывая, что $\cos\alpha + \cos\gamma = 0$ и $\cos\beta + \cos\delta = 0$, после алгебраических преобразований находим квадраты диагоналей:

$$d_1^2 = \frac{(ab+dc)(ac+bd)}{bc+ad}; \qquad d_2^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+dc}.$$

Таким образом, получаем: $d_1 d_2 = ac + bd$ и, кроме того, $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{ab + dc}{bc + ad}$.

Р. Симсон (1687—1768) — шотландский математик, популяризатор геометрии. На самом деле теорема доказана в 1797 году **В. Уоллесом**.

Теорема. *Для того чтобы четыре точки принадлежали одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы ортогональные проекции одной из них на три прямые, определяемые тремя остальными точками, были коллинеарны.*

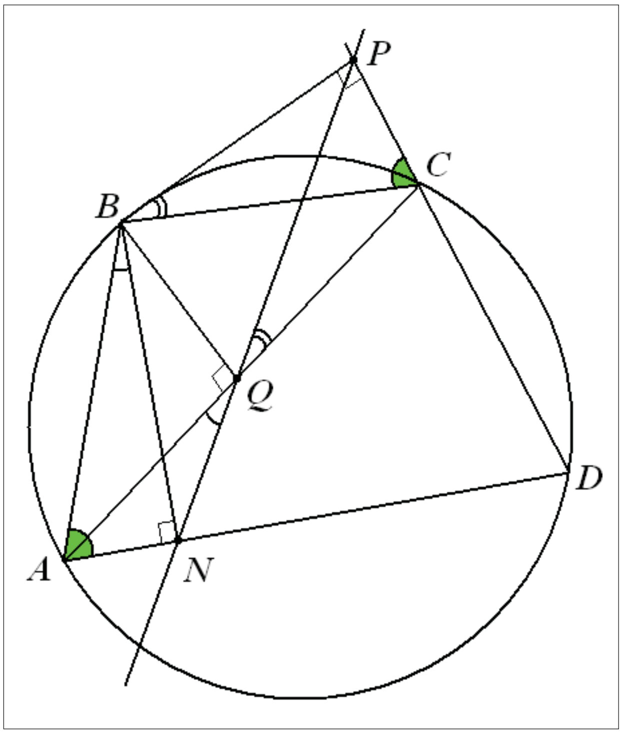


Рис. 11

В прямой теореме (необходимость) четырехугольник *ABCD* вписан в окружность и даны основания перпендикуляров, проведенных из вершины *B* на прямые *CD*, *AC* и *AD* — это точки *P*, *Q*, *N*. Так как для четырехугольников *BPCQ* и *ABQN* выполняется условие вписанности в окружности с диаметрами *BC* и *AB* соответственно, то углы *PBC* и *PQC*, а также углы *ABN* и *AQN* равны. С другой стороны, углы *BAD* и *BCP* также равны, так как четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Таким образом, угол *AQN* равен углу *PQC*. Следовательно, точки *P*, *Q*, *N* лежат на одной прямой.

В обратной теореме (достаточность) основания перпендикуляров, проведенных из вершины *B* на прямые *CD*, *AC* и *AD* (точки *P*, *Q*, *N*) лежат на одной прямой. Отсюда следует равенство углов *AQN* и *PQC*. А так как четырехугольники *BPCQ* и *ABQN* вписаны в окружности, то все углы *PBC*, *PQC*, *ABN*, *AQN* равны. Отсюда следует равенство углов *BAD* и *BCP* и, как следствие, вписанность четырехугольника в окружность.

§ 6. Свойства вписанного четырехугольника с перпендикулярными диагоналями

Приведем пять свойств вписанного четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, которые встречались в задачах на различных экзаменах и олимпиадах.

1. Если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности. Докажите это.

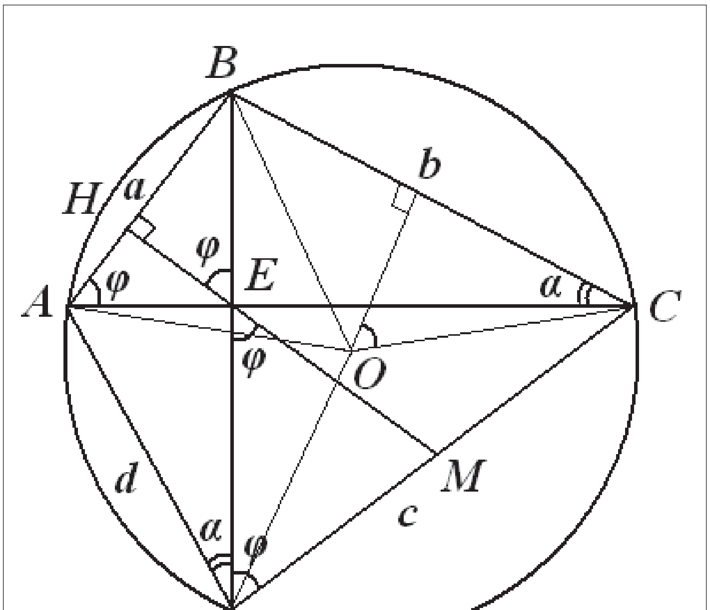


Рис. 12

На рисунке 12 обозначены равные углы. Из теоремы синусов для вписанных треугольников $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(90^0 - \alpha)} = 2R$ получаем два равенства:

$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2$; $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = 4R^2$.

2. Медиана треугольника CED перпендикулярна стороне AB. Это следует из равенства углов, обозначенных буквой φ.

3. Расстояние от центра окружности до стороны четырехугольника вдвое меньше противоположной стороны.

Из первого свойства следует, что $\frac{d^2}{4} = R^2 - \frac{b^2}{4}$, то есть расстояние от точки O до стороны BC равно AD:2. Из этого свойства можно получить формулу Птолемея, используя выражения для площадей треугольников.

4. Ломаная AOC делит четырехугольник на две равновеликие фигуры. Это следует из равенства площадей:

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\varphi \quad \text{и} \quad S_{AOD} = \frac{1}{2} R^2 \sin(180^0 - 2\varphi).$$

5. Если перпендикуляры, опущенные на сторону AB из вершин C и D, пересекают диагонали BD и AC в точках E и F, то $CDFE$ — ромб (смотри рис. 13).

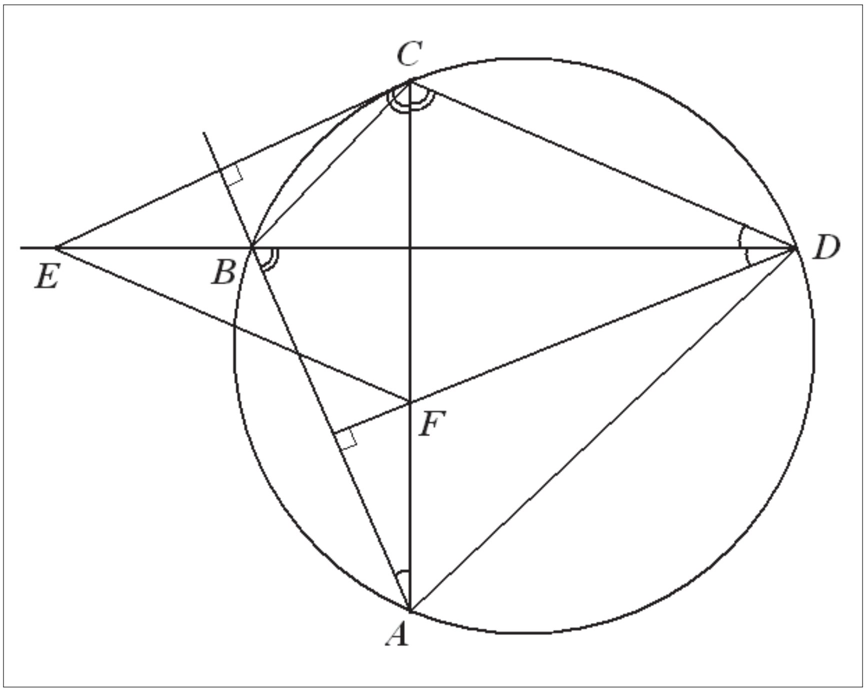


Рис. 13

Доказательство этого свойства видно из рисунка, где из равенства отмеченных углов следует, что диагонали служат биссектрисами в четырехугольнике $CDFE$ и, кроме того, они перпендикулярны. Таким образом, $CDFE$ является ромбом по одному из признаков.

ГЛАВА II
КЛУМБОВЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК КАК НОВАЯ ГЛАВА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Клумбовый четырехугольник

Четырехугольники бывают вписанные, описанные, выпуклые и прочие. Некоторые имеют собственные названия. Но среди них есть интересный четырехугольник, который вписан и одновременно описан. Этот четырехугольник достаточно произволен в пределах границ, образованных двумя окружностями. Вершины его лежат на внешней окружности, а стороны касаются внутренней. Назовем такой «законопослушный» четырехугольник «клумбовым».

Если обратиться к «Википедии», то у этого четырехугольника много и других названий:

- вписанно-описанный;
- бицентрический (bicentric quadrilateral);
- хордокасающийся (chord-tangent quadrilateral);
- двухокружностный (double circle quadrilateral).

В российской литературе по элементарной геометрии он практически нигде не представлен, поэтому и названия не получил. Стоит отметить, что название «бицентрический» четырехугольник не совсем удачное, так как у четырехугольника еще есть центры, не менее важные, чем центры двух окружностей. Поскольку общепринятого названия нет, то с учетом рисунка такой четырехугольник и был назван «клумбовым». В дальнейшем будем придерживаться этого названия.

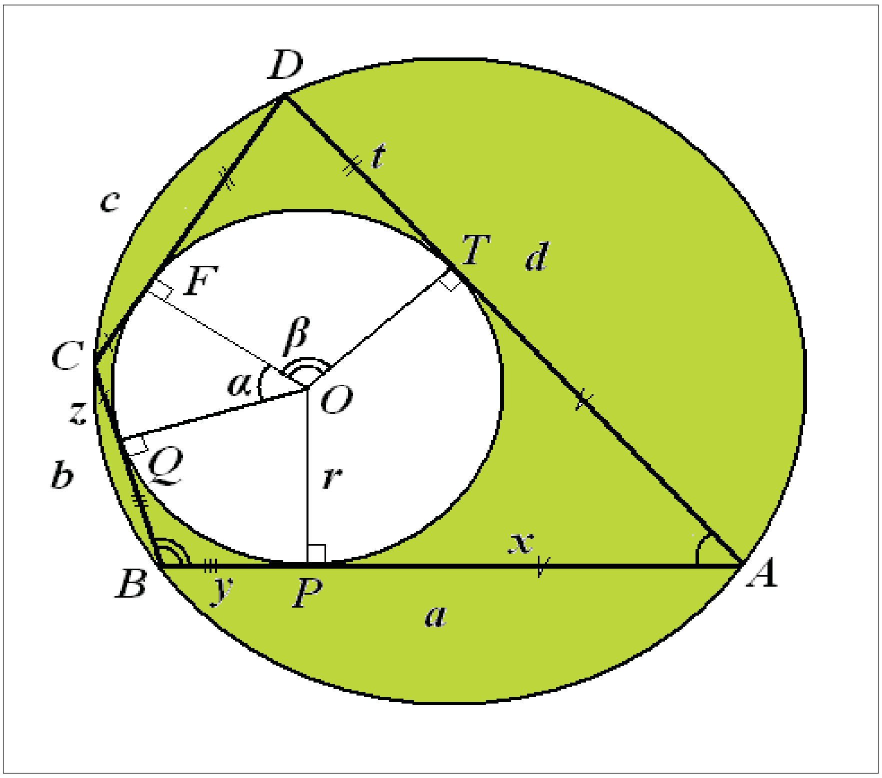


Рис. 14

На рисунке 14 представлен клумбовый четырехугольник. Алгоритм его построения несложен. Пусть даны сторона *AB* и два прилежащих угла α и β. Построив биссектрисы углов, получим центр вписанной окружности и ее радиус. При этом *P*, *Q*, *T* — это точки касания вписанной окружности со сторонами четырехугольника. Так как сумма противоположных углов равна 180^0, то, учитывая, что радиусы перпендикулярны сторонам, получаем, что углы *FOT* = β, а *FOQ* = α. Значит, в точке *O* следует построить угол *α*, сторона которого *OQ*. Таким образом, получаем точку касания *F*, после чего строим оставшуюся сторону четырехугольника *CD*.

Подобным образом можно построить этот четырехугольник, если даны радиус вписанной окружности и два его угла. В этом случае строим три радиуса, между которыми — углы *FOT* = *β*, а *FOQ* = *α*, затем — угол $TOP = 180^0 - \alpha$. Получив все точки касания, достраиваем четырехугольник.

Выпишем некоторые его параметры. Для этого нужно решить систему равенств: $\begin{cases} b+d=a+c \\ bd+ac=d_1d_2 \\ b^2+d^2-(a^2+c^2)=2d_1d_2\cos\varphi \end{cases}$, где перечислены условие вписанности окружности в четырехугольник, теорема Птолемея и формула, связанная с прямой и обратной теоремами о перпендикулярности диагоналей четырехугольника (смотри § 1). Из первого равенства имеем $b^2+d^2-(a^2+c^2)=2ac-2bd,$ отсюда система приобретает вид: $\begin{cases} bd+ac=d_1d_2 \\ ac-bd=d_1d_2\cos\varphi \end{cases}$. Таким образом, $\begin{cases} ac=d_1d_2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} \\ bd=d_1d_2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$ и $\dfrac{bd}{ac}=tg^2\dfrac{\varphi}{2}$.

Произведение сторон имеет вид: $abcd=d_1^2d_2^2\dfrac{\sin^2\varphi}{4}$, то есть площадь четырехугольника $S=\dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi=\sqrt{abcd}$ — это та единственная формула, которую можно встретить в литературе для этого вида четырехугольников.

Выпишем стороны и отрезки касательных для клумбового четырехугольника через радиус вписанной окружности и два известных угла α и β:

$$x=r\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2};\qquad y=r\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2};$$

$$z=r\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2};\qquad t=r\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2};$$

$$a=r\cdot\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right);\qquad b=r\cdot\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right);$$

$$c=r\cdot\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right);\qquad d=r\cdot\left(ctg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right).$$

Учитывая, что $tg\dfrac{\alpha}{2}+ctg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$ и $tg\dfrac{\beta}{2}+ctg\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{2}{\sin\beta}$,

получаем полупериметр и площадь четырехугольника:

$$p=2r\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right);\ S=2r^2\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right).$$

Из теоремы синусов следует, что $d_1 = 2R\sin\alpha$ и $d_2 = 2R\sin\beta$.

Найдем сумму произведений противоположных сторон: $ac + bd = 4r^2 + r^2\left(tg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\alpha}{2}\right)\left(tg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\beta}{2}\right)$.

После подстановки в теорему Птолемея и тригонометрических преобразований получаем формулу для радиуса описанной окружности: $R = r\cdot\frac{\sqrt{1+\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

Из формулы следует неравенство $R \geq r\sqrt{2}$. Равенство возможно только для квадрата. Выпишем формулы для сторон в несколько ином виде:

$$a = r\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}; \qquad b = r\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}};$$

$$c = r\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}; \qquad d = r\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Отсюда получаем дополнительные соотношения для данных четырехугольников: $tg\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{bd}{ac}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$; $\frac{b}{d} = tg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\beta}{2}$, $\frac{c}{a} = tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}$.

Отсюда следует формула площади четырехугольника: $S = ad\cdot tg\frac{\alpha}{2} = ab\cdot tg\frac{\beta}{2}$.

Четырехугольники *APOT, PBQO, QCFO, FDTO* являются дельтоидами, площади которых соответственно равны: $S_1 = xr;$ $S_2 = yr;$ $S_3 = zr;$ $S_4 = tr$.

Таким образом, имеем следующие равенства:

$$S_1\cdot S_3 = S_2\cdot S_4 = r^4; \qquad S_1 + S_3 + S_2 + S_4 = S; \qquad \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4} = \frac{S}{r^4}.$$

Следующий набор формул связан с вневписанными окружностями для этих четырехугольников. На рисунке 15 показаны два центра вневписанных окружностей, касающихся сторон *b* и *c.*

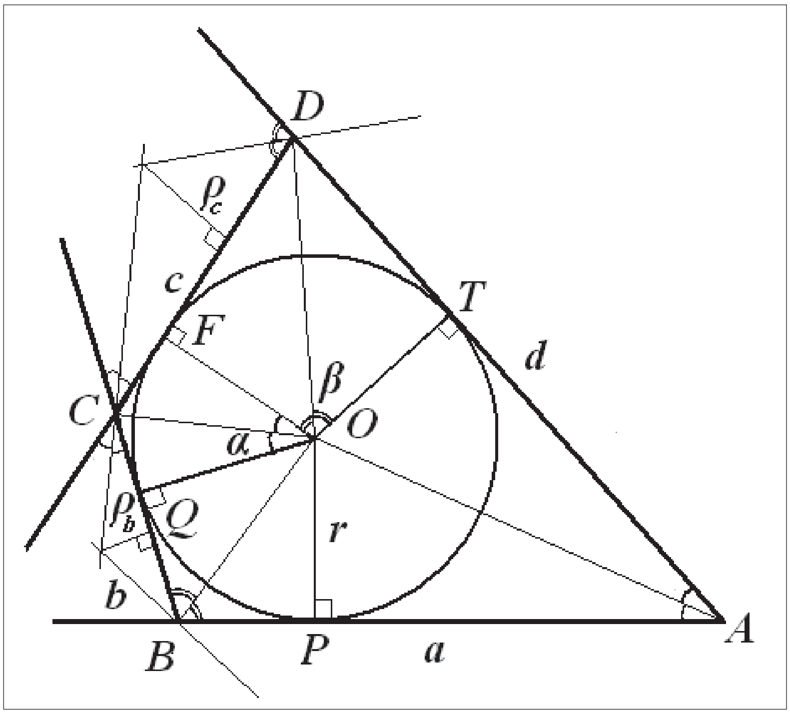


Рис. 15

Из равенства $c = r \cdot \left(tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2} \right) = \rho_c \cdot \left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} \right)$ следует, что $\rho_c = r \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2}$.

Из равенства $b = r \cdot \left(tg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} \right) = \rho_b \cdot \left(ctg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2} \right)$ следует, что $\rho_b = r \cdot \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\beta}{2}}$.

Аналогично можно получить формулы и для других радиусов:

$$\rho_a = \frac{r}{tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2}}; \qquad \rho_d = r \cdot \frac{tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, получаем следующие выражения для радиусов вневписанных окружностей:

$$\rho_a \cdot \rho_c = \rho_b \cdot \rho_d = r^2; \qquad \rho_a + \rho_b + \rho_c + \rho_d = \frac{4r}{\sin\alpha \cdot \sin\beta};$$

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c + \rho_d \geq 4r; \qquad \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d} = \frac{\rho_a + \rho_b + \rho_c + \rho_d}{r^2}.$$

Кроме того, для расстояний от центра вписанной окружности до вершин четырехугольника, а также для расстояний между центром вписанной окружности и центрами вневписанных окружностей (O_i), учитывая, что треугольники (OAO_a и др.) прямоугольные, имеем следующие выражения:

$$\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OD^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{r^2}; \qquad \frac{1}{OO_a{}^2}+\frac{1}{OO_b{}^2}+\frac{1}{OO_c{}^2}+\frac{1}{OO_d{}^2}=\frac{1}{r^2};$$

$$OO_a{}^2+OO_b{}^2+OO_c{}^2+OO_d{}^2=\frac{16r^2}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}; \qquad OO_a{}^2+OO_b{}^2+OO_c{}^2+OO_d{}^2\ge 16r^2;$$

$$OO_a{}^2+OO_b{}^2+OO_c{}^2+OO_d{}^2=(\rho_a+\rho_b+\rho_c+\rho_d)^2.$$

Полученные выше формулы для этих четырехугольников позволяют расширить спектр задач и для факультативных занятий, и для занятий по олимпиадной тематике. Формулы выглядят проще в частных случаях. А именно: при равенстве двух углов мы говорим о трапеции, а при равенстве одного из углов 90° — о дельтоиде.

§ 2. О расстоянии между центрами окружностей в клумбовом четырехугольнике

Известно, что для каждого треугольника существуют описанная около него и вписанная в этот треугольник окружности. Известна формула Эйлера для расстояния между центрами этих окружностей (смотри главу I, § 1): $l^2=R^2-2Rr$.

С четырехугольником ситуация другая. У него может не быть ни вписанной окружности (таков прямоугольник), ни описанной окружности (возьмите треугольник и добавьте четвертую вершину, не лежащую на описанной окружности). При этом существуют четырехугольники, имеющие и вписанную, и описанную окружности (например, квадрат).

Четырехугольник, около которого можно описать окружность и в который можно вписать окружность, назовем клумбовым (смотри главу II, § 1). В этом параграфе получим формулы для клумбового четырехугольника, аналогичные формулам Эйлера для треугольника.

1. Центр описанной окружности находится внутри четырехугольника

Пусть точка O — центр вписанной окружности, точка P — центр описанной окружности клумбового четырехугольника (смотри рис. 16).

В клумбовом четырехугольнике к какой-либо его стороне прилежат либо два острых угла, либо острый и прямой (дельтоид), либо все прямые углы (квадрат). Как и в § 5, будем считать, что в четырехугольнике заданы углы при стороне AB, причем эти углы либо острые, либо острый и прямой. В треугольнике OPQ найдем:

$$l^2=(r-PH)^2+PQ^2=\left(r-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-r\cdot ctg\frac{\beta}{2}\right)^2.$$

В случае неравенства $PH>r$ формула не меняется, так как разность возводится в квадрат. Учитывая, что точка O является точкой пересечения биссектрис углов четырехугольника, имеем соотношение:

$$a=r\cdot\left(ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}\right).$$

Подставляя выражение для стороны a в формулу квадрата расстояния и производя упрощения, получим выражение для квадрата расстояния между центрами окружностей в следующем виде:

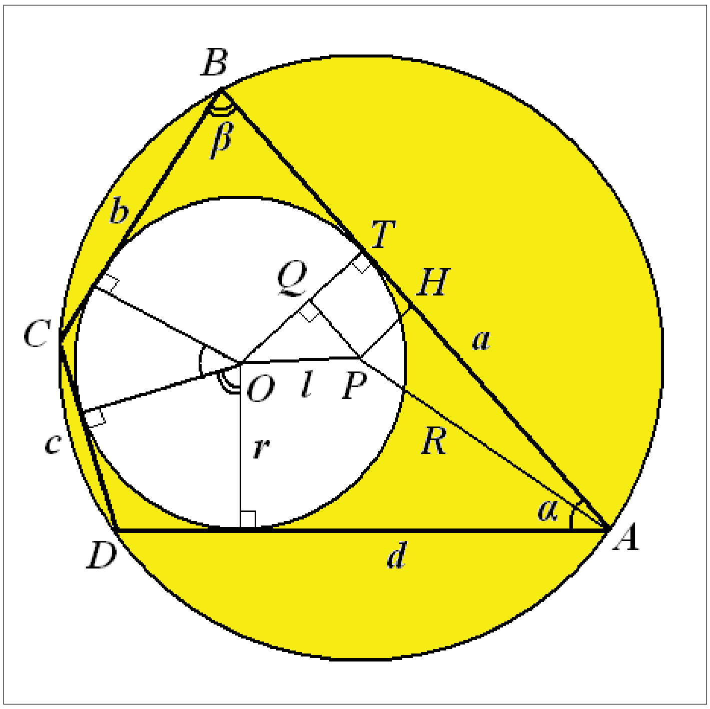


Рис. 16

$$l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 - r^2\left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2}\right)^2} - r^2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2} \cdot ctg\frac{\beta}{2} \quad (1).$$

Прежде чем проводить дальнейшие преобразования, введем обозначения:

$$ctg\frac{\alpha}{2} = p; \qquad ctg\frac{\beta}{2} = q.$$

В этих обозначениях $\sin\alpha = \frac{2p}{1+p^2}$; $\sin\beta = \frac{2q}{1+q^2}$, а полученная в § 1 главы II формула для радиуса описанной окружности $R^2 = r^2 \cdot \frac{1+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$ (2) имеет вид:

$$R^2 = r^2\frac{(1+p^2)^2(1+q^2)^2 + 4pq(1+p^2)(1+q^2)}{16p^2q^2}.$$

Рассмотрим подкоренное выражение в формуле (1), которое после нескольких преобразований приобретает окончательный вид:

$$4R^2 - r^2(p+q)^2 = \frac{r^2}{4p^2q^2}\cdot(1+p^2+q^2+2pq-p^2q^2)^2.$$

Таким образом, $l^2 = R^2 + r^2 - \frac{r^2}{2pq}\cdot\left|1+p^2+q^2+2pq-p^2q^2\right| - r^2pq$.

Пусть выражение под знаком модуля положительно. Ниже покажем, что в этом случае центр описанной окружности лежит внутри четырехугольника. После некоторых упрощений получаем формулу расстояния между центрами: $l^2 = R^2 - \frac{r^2}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + pq + \frac{1}{pq}\right)$.

Однако если присмотреться к выражению в скобках, то обнаружим, что это $\frac{4}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$. Таким образом, преобразования приводим к окончательной формуле для квадрата расстояния:

$$l^2 = R^2 - \frac{2r^2}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \quad (3)$$

или зависимости через радиус вписанной окружности и произведение синусов:

$$l^2 = r^2\cdot\frac{1-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta} \quad (4).$$

2. Центр описанной окружности находится вне четырехугольника

Если центр P описанной окружности расположен вне четырехугольника, квадрат расстояния вычисляется по формуле:

$$l^2 = (r + PH)^2 + PQ^2 = \left(r + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - r \cdot ctg \frac{\beta}{2} \right)^2 .$$

Но с учетом того, что в этом случае $1 + p^2 + q^2 + 2pq - p^2 q^2 \le 0$ и модуль этого выражения раскрывается с обратным знаком, формула приобретает тот же вид формулы (3). Докажем, что это так.

Подкоренное выражение равно нулю, если диаметр описанной окружности равен стороне. В данном случае $a = 2R$, что может означать только то, что $p^2 q^2 = 1 + p^2 + q^2 + 2pq$.

Рассмотрим неравенство $p^2 q^2 \ge 1 + p^2 + q^2 + 2pq$, или $2p^2 q^2 \ge (1 + p^2)(1 + q^2) + 2pq$.

Разделив неравенство на $2pq$, получим выражение $ctg \frac{\alpha}{2} \cdot ctg \frac{\beta}{2} - 1 \ge \frac{2}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$. Следующие тригонометрические преобразования приводят неравенство к виду $2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \ge 1$.

Так как $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$, то неравенство представим в такой форме:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \ge tg \frac{\alpha+\beta}{2} .$$

Но левая часть формулы есть $tg \frac{\varphi}{2}$ (глава II, § 1), где φ — угол между диагоналями, обращенный к стороне a.

Таким образом, $tg \frac{\varphi}{2} \ge tg \frac{\alpha+\beta}{2}$, или $\varphi \ge \alpha + \beta$.

А теперь обратимся к рисунку 17, на котором центр описанной окружности находится вне четырехугольника.

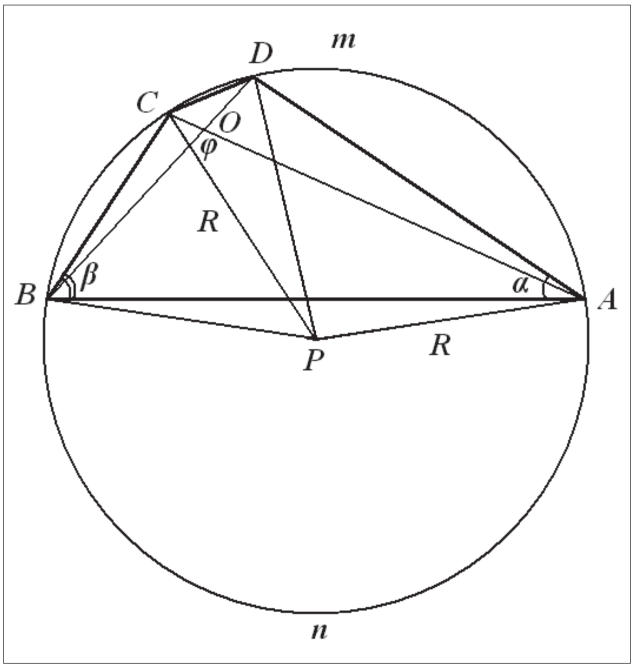


Рис. 17

Сумма углов $\alpha + \beta = \frac{\cup BmA}{2} + \frac{\cup CD}{2}$, а угол $\varphi = \frac{\cup AnB}{2} + \frac{\cup CD}{2}$. Но так как нижняя дуга больше, чем верхняя, при условии, что центр окружности находится вне четырехугольника, то $\varphi \geq \alpha + \beta$. Знак равенства означает, что дуги равны и сторона является диаметром окружности.

Если обозначить произведение синусов $\sin\alpha \cdot \sin\beta = t$, то из решения квадратного уравнения $R^2t^2 - r^2t - r^2 = 0$ (смотри формулу (2)) получаем значение $t = \frac{r^2 + \sqrt{r^4 + 4R^2r^2}}{2R^2}$.

Подставив это значение в формулу (3), получим:

$$l^2 = R^2 - \frac{4r^2R^2}{r^2 + \sqrt{r^4 + 4R^2r^2}}.$$

Однако, если провести небольшое преобразование, то квадрат расстояния между окружностями получается в форме выражения:

$$l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} \quad (5).$$

А это есть формула Фусса, полученная им в 1792 году (Николай Иванович Фусс — российский математик швейцарского происхождения, помощник Леонарда Эйлера в его многочисленных вычислениях). Легко убедиться, что обратная подстановка R^2 из формулы (2) в формулу Фусса приводит к выражению для расстояния в форме формул (3) или (4). Таким образом, полученная выше формула (4) избавлена от радикала и отличается только знаком от формулы для радиуса описанной окружности. В случае квадрата $t = 1$ и $l = 0$.

Можно убедиться в том, что результат не изменится, если отталкиваться от других сторон четырехугольника при получении формулы (3). Чтобы показать это, выпишем некоторые формулы для остальных сторон четырехугольника и учетверенного квадрата расстояния от центра описанной окружности до стороны четырехугольника:

$$b = r\cdot\left(tg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2}\right); \quad 4R^2 - b^2 = \frac{r^2}{4p^2q^2}\cdot(1+p^2-q^2+2pq+p^2q^2)^2;$$

$$c = r\cdot\left(tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2}\right); \quad 4R^2 - c^2 = \frac{r^2}{4p^2q^2}\cdot(p^2+q^2+2pq+p^2q^2-1)^2;$$

$$d = r\cdot\left(ctg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2}\right); \quad 4R^2 - d^2 = \frac{r^2}{4p^2q^2}\cdot(1-p^2+q^2+2pq+p^2q^2)^2.$$

Пусть это будет сторона c. Тогда по аналогии со стороной a квадрат расстояния равен: $l^2 = \left(\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} - r\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - r\cdot tg\frac{\beta}{2}\right)^2$.

После возведения в квадрат и необходимых преобразований, как и для стороны a, получаем опять выражение (3). Если центр описанной окружности вне четырехугольника, то расчетная формула меняет вид:

$$l^2 = \left(\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + r\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - r\cdot tg\frac{\beta}{2}\right)^2.$$

Но при принятых условиях для углов (два острых угла при стороне AB) центр описанной окружности вне четырехугольника может располагаться только со стороны a. Пусть это не так и центр примыкает к стороне c.

Тогда должно выполняться неравенство:

$$p^2 + q^2 + 2pq + p^2q^2 \le 1, \quad \text{или} \quad 2 \ge (1+p^2)(1+q^2) + 2pq.$$

Разделив неравенство на $2pq$, получим выражение:

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}-1\geq\frac{2}{sin\,\alpha\cdot sin\,\beta},\qquad \text{или}\qquad 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\left(-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq 1,$$

которое заведомо не выполняется.

Итак, нам известны три формулы для определения расстояния между центрами окружностей. Формула (5) впервые была получена в XVIII веке Н. И. Фуссом. Вторая формула — американского математика XX века Леонарда Карлитца:

$$l^2 = R^2 - 2Rr\mu \quad (6),$$

где μ выражается сложным образом через стороны четырехугольника:

$$\mu=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}}=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(b+d)^2(ac+bd)}}\;.$$

Наконец, полученная новая формула для расстояния, имеющая более простой вид (4).

Все три формулы связаны между собой. Достаточно воспользоваться зависимостью между радиусами (2). Связь формулы (4) с формулой (5) показана выше.

Если же воспользоваться формулой (3), то, учитывая, что $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{r}{R}\sqrt{1+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, получаем формулу (6), где коэффициент

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{1+\sin\alpha\cdot\sin\beta}}\;.$$

Чтобы проверить, действительно ли коэффициент в формуле Карлитца имеет подобный вид, необходимо выразить стороны четырехугольника через радиус вписанной окружности и тригонометрические функции углов. В принятых выше обозначениях стороны четырехугольника имеют вид: $a=r\cdot(p+q)$, $b=r\cdot\left(\frac{1}{p}+q\right)$, $c=r\cdot\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$, $d=r\cdot\left(p+\frac{1}{q}\right)$.

Подставим в формулу $\mu=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}}$ значения сторон, и после некоторых преобразований мы получим выражение:

$$\mu = \sqrt{\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(p+q)^2+(1+pq)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4pq}{(1+p^2)(1+q^2)}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin\alpha\cdot\sin\beta}}.$$

Учитывая то, что полученные формулы зависят от произведения $\sin\alpha\cdot\sin\beta$, которое остается неизменным при изменении углов, новые формулы (3) и (4) подтвердили справедливость теоремы Понселе о существовании бесконечного множества возможных клумбовых четырехугольников при заданных радиусах окружностей либо радиусе одной окружности и положении одной окружности внутри другой. Комбинируя формулы (3) и (4), можно получить еще зависимость: $l^2 = R^2\cdot\frac{1-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{1+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

Определенным недостатком всех перечисленных выражений является то, что это квадратичные зависимости. Но оказывается, есть более удачный выбор параметров четырехугольника, при котором формулы заметно упрощаются. И среди этих параметров — расстояние между серединами диагоналей четырехугольника ε. Рассмотрим квадрат периметра четырехугольника и воспользуемся рядом формул, среди которых важную роль играет формула Эйлера для четырехугольников:

$$4p^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)+2(ab+cd)+2(ad+cb).$$

С другой стороны: $a^2+b^2+c^2+d^2 = d_1^2+d_2^2+4\varepsilon^2$ — формула Эйлера (смотри главу II, § 1),

$ac+bd = d_1d_2$ — формула Птолемея,

$ab+cd = \frac{2S}{\sin\beta}$; $\quad ad+cb = \frac{2S}{\sin\alpha}$.

После подстановки имеем следующее выражение:

$$4p^2 = (d_1+d_2)^2+4\varepsilon^2+4S\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},$$

или

$$p^2 = R^2(\sin\alpha+\sin\beta)^2+\varepsilon^2+S\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Учитывая, что $p^2 = \frac{S^2}{r^2}$; $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta} = \frac{S}{2r^2}$, а $R^2 = \frac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}$, получаем выражение: $\frac{S^2}{r^2} = \frac{S^2}{2r^2} \cdot \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2\sin\varphi} + 1 \right) + \varepsilon^2$ и после преобразований — очередную формулу площади: $S = \frac{2\varepsilon \cdot r}{\sqrt{1 - \sin\alpha \cdot \sin\beta}}$.

При этом расстояние между серединами диагоналей четырехугольника равно: $\varepsilon = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{1 - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$ (7).

А теперь подставим выражение $1 - \sin\alpha \cdot \sin\beta = \left(\frac{2\varepsilon}{p} \right)^2$ в формулу (4) и получим выражение без квадратов $l = \left(\frac{2\varepsilon}{p} \right) \frac{r}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ (8).

Если же подставить произведение синусов $\sin\alpha \cdot \sin\beta = 1 - \left(\frac{2\varepsilon}{p} \right)^2$ в формулу (8), то зависимость для расстояния приобретает вид: $l = \frac{r}{\frac{p}{2\varepsilon} - \frac{2\varepsilon}{p}}$.

Но и это не самая простая зависимость.

Для дальнейших преобразований воспользуемся выражением для полупериметра четырехугольника: $p = 2r \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} \right)$. Если взять произведение синусов из формулы для полупериметра $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \left(\frac{2r}{p} \right) (\sin\alpha + \sin\beta)$ и подставить в формулу (8), окончательно получаем выражение:

$$\boxed{l = \frac{\varepsilon}{\sin\alpha + \sin\beta}} \quad (9).$$

Эта формула по своей красоте и простоте заметно лучше формул Фусса и Карлитца.

3. О вневписанных окружностях

Среди редко применяемых есть похожая на формулу Эйлера формула расстояния между центром описанной окружности и центром вневписанной окружности $L_i^2 = R^2 + 2\rho_i R$, где i означает соответствующую сторону треугольника (*a, b, c*).

Определим расстояние между центром описанной окружности и центром вневписанной окружности, касающейся стороны *d*, в клумбовом четырехугольнике. На рисунке 18 показана интересующая нас часть рисунка 15 с центрами окружностей — описанной (*P*) и вневписанной (O_d).

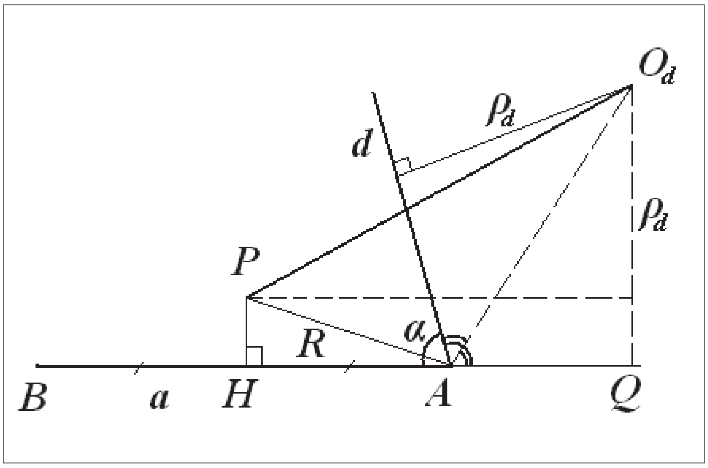


Рис. 18

Из рисунка следует равенство:

$$PO_d = L_d^2 = (\rho_d - PH)^2 + HQ^2 = \left(\rho_d - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \rho_d \cdot tg\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

или

$$L_d^2 = R^2 + \rho_d\left(\rho_d + a \cdot tg\frac{\alpha}{2} + \rho_d \cdot tg^2\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4R^2 - a^2}\right).$$

Для дальнейших преобразований необходим список радиусов вневписанных окружностей, полученных в § 5:

$$\rho_a = \frac{r}{tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2}}; \qquad \rho_b = r \cdot \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\beta}{2}};$$

$$\rho_c = r \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2}; \qquad \rho_d = r \cdot \frac{tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Кроме того, воспользуемся результатом, полученным выше для подкоренного выражения. Так как $\rho_d = r\frac{p}{q}$, то дальнейшие преобразования приводят к следующему виду:

$$L_d^2 = R^2 + r^2\frac{p}{q}\left(\frac{p}{2q} + \frac{q}{2p} + \frac{1}{2pq} + \frac{pq}{2}\right), \qquad \text{или} \qquad L_d^2 = R^2 + \frac{2\rho_d \cdot r}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Мы получили формулу, подобную формуле для треугольника. Как и при выводе формулы (3), следует подчеркнуть случай, когда центр описанной окружности находится вне четырехугольника. Тогда исходное выражение имеет вид: $L_d^2 = (\rho_d + PH)^2 + HQ^2 = \left(\rho_d + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \rho_d \cdot tg\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

Но при вычислении квадратного корня модуль выражения $1 + p^2 + q^2 + 2pq - p^2q^2$ раскрывается с обратным знаком, и формула приобретает тот же вид. Как и в случае формулы (3), выполняя каждый раз громоздкие преобразования, можно убедиться, что полученная выше формула носит универсальный характер, как и в треугольнике, то есть имеет вид:

$$L_i^2 = R^2 + \frac{2\rho_i \cdot r}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \quad (11),$$

где i означает соответствующую сторону четырехугольника (a, b, c, d).

4. О симметрии формул треугольника и четырехугольника

Можно заметить, что для клумбового четырехугольника выражение $\frac{r}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ играет важную роль некоторого эффективного радиуса описанной окружности $R_{эфф}$. Из формул (2) и (4) следует выражение $l^2 + R^2 = 2R^2_{эфф}$, из которого видно, что этот радиус можно связать с расстоянием от центра вписанной окружности до концов диаметра описанной окружности, перпендикулярного отрезку OP (смотри рис. 16). Так как диапазон изменения для l: $0 \le \ell < R$, где левая граница соответствует случаю квадрата, а правая — случаю стреловидного дельтоида с тупым концом, то из формулы следует промежуток изменения радиуса: $\frac{R}{\sqrt{2}} \le R_{эфф} < R$. При введении этого параметра для четырехугольника некоторые формулы приобретают вид, подобный формулам для треугольника: $l^2 = R^2 - 2R_{эфф}r$; $L_i^2 = R^2 + 2R_{эфф}\rho_i$.

§ 3. Формулы площади

Площадь — важная характеристика любой плоской фигуры. Школьные учебники содержат формулы площади треугольника и некоторых четырехугольников — прямоугольника, трапеции, параллелограмма, ромба. Вывод формул площади произвольного четырехугольника — это уже материал факультативных занятий.

Кроме указанных выше четырехугольников есть еще один частный случай — вписанный и одновременно описанный четырехугольник, названный клумбовым. О площади таких четырехугольников и пойдет речь далее.

В § 1, 2 главы II, посвященных этим четырехугольникам, были получены четыре формулы площади:

$$S = \sqrt{abcd}\ ; \quad S = 2r^2\left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right); \quad S = ad \cdot tg\frac{\alpha}{2} = ab \cdot tg\frac{\beta}{2}; \quad S = \frac{2\varepsilon \cdot r}{\sqrt{1 - sin\,\alpha \cdot sin\,\beta}}.$$

Но есть еще и другие формулы площади, имеющие необычный вид и включающие другие параметры четырехугольника. Рассмотрим некоторые из них.

На рисунке 19 представлен клумбовый четырехугольник. Выразим стороны и отрезки касательных для клумбового четырехугольника через радиус вписанной окружности и два известных угла α и β:

$$x = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}; \quad y = r \cdot ctg\frac{\beta}{2}; \quad z = r \cdot tg\frac{\alpha}{2}; \quad t = r \cdot tg\frac{\beta}{2}.$$

Так как произведение $xyzt = r^4$, а полупериметр $p = x + y + z + t$, то получаем еще одну формулу площади: $S = \sqrt[4]{xyzt} \cdot (x + y + z + t)$.

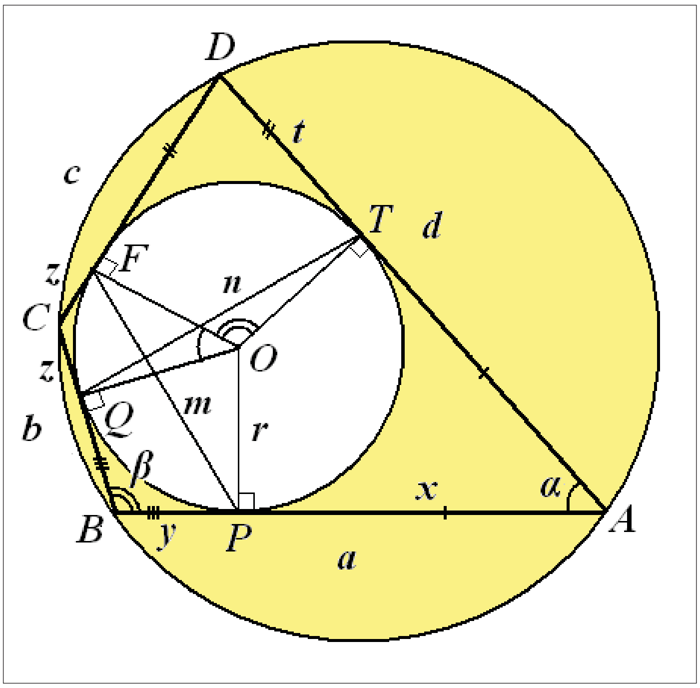


Рис. 19

Найдем расстояния между противоположными точками касания вписанной окружности (смотри рис. 19): $PF = m$, $QT = n$.

Из треугольников *FOP* и *QOT* следует, что

$$m = 2r \cdot \sin \frac{180^0 - \beta + \alpha}{2} = 2r \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

и

$$n = 2r \cdot \sin \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Кроме того, из § 1 главы II следует, что $\frac{m}{n} = \frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}} = tg \frac{\varphi}{2}$, где φ — угол между диагоналями, обращенный к стороне *a*.

Найдем диагонали параллелограмма, который образуется при соединении прямолинейными отрезками середин сторон четырехугольника (смотри рис. 20). По теореме косинусов для треугольников *GHN* и *HNE*, имеем:

$$\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - 2 \cdot \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \cdot \cos \varphi = g^2; \qquad \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + 2 \cdot \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \cdot \cos \varphi = h^2.$$

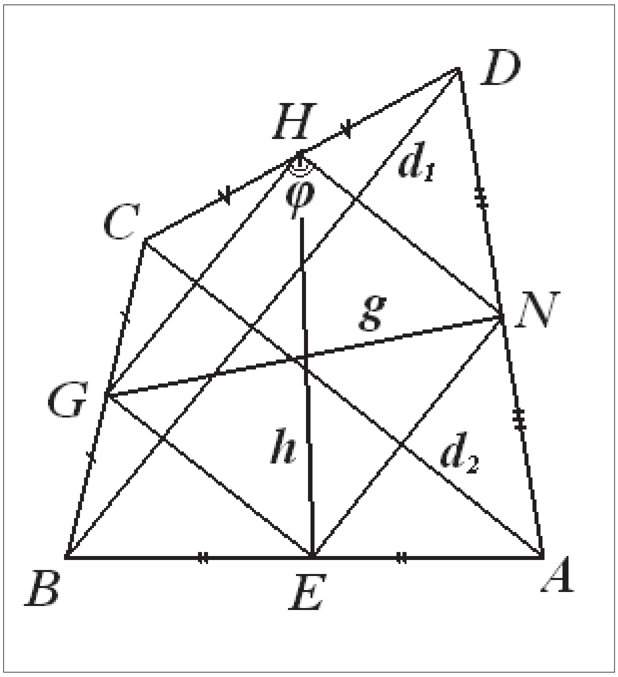


Рис. 20

Полученную отсюда разность $h^2 - g^2 = d_1 d_2 \cos\varphi$ подставим в формулу площади $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$ и в результате получаем равенство $S = \frac{h^2 - g^2}{2} \cdot tg\varphi$. Формула справедлива для произвольного четырехугольника за исключением четырехугольников с перпендикулярными диагоналями. Если в этом выражении перейти к тангенсу половинного угла, равному отношению $\frac{m}{n}$, то получим шестую формулу площади клумбового четырехугольника: $S = mn \cdot \frac{h^2 - g^2}{n^2 - m^2}$. Чтобы формула не зависела от выбора угла между диагоналями, следует ввести знак модуля: $S = mn \cdot \left| \frac{h^2 - g^2}{n^2 - m^2} \right|$.

Следующая формула площади может быть получена, если привлечь для этого приведенные в § 2 главы II формулы для радиуса описанной окружности и расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей в клумбовом четырехугольнике.

Например, для четырехугольника, вписанного в окружность, формула площади преобразуется после подстановки диагоналей, выраженных из теорем синусов, к виду $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\varphi$. Воспользовавшись равенством для произведения синусов двух углов четырехугольника, нетрудно получить седьмую формулу площади клумбового четырехугольника:

$$S = 2R^2 \cdot \frac{R^2 - l^2}{R^2 + l^2} \cdot \sin\varphi .$$

Если вернуться ко второй формуле площади и подставить туда зависимость между радиусами окружностей, то получим выражение для площади:

$$S = 2R^2 \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta \cdot (\sin\alpha + \sin\beta)}{1 + \sin\alpha \sin\beta} .$$

Отсюда выясняется, что угол между диагоналями можно определить по формуле $\sin\varphi = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{1 + \sin\alpha \sin\beta}$.

Если диагонали четырехугольника перпендикулярны (это случай дельтоида, у которого один из углов равен 90°), то формула имеет простой вид: $S = 2R^2 \sin\alpha$.

Комбинируя формулы из § 1 главы II $tg\dfrac{\varphi}{2} = \sqrt{\dfrac{bd}{ac}}$; $\dfrac{b}{d} = tg\dfrac{\alpha}{2} \cdot ctg\dfrac{\beta}{2}$; $\dfrac{c}{a} = tg\dfrac{\alpha}{2} \cdot tg\dfrac{\beta}{2}$ и подставляя все в первую формулу площади, получаем еще одно выражение: $S = a^2 \cdot tg\dfrac{\alpha}{2} \cdot tg\dfrac{\beta}{2} \cdot tg\dfrac{\varphi}{2}$.

§ 4. Система задач в клумбовом четырехугольнике

В § 1—3 главы II были рассмотрены свойства вписанного и одновременно описанного четырехугольника, названного клумбовым. Поиск информации по этим четырехугольникам привел к следующим результатам. Если в западной печати в новом столетии можно встретить некоторое число публикаций по этим четырехугольникам, названным у них бицентрическими, то в отечественной математической литературе информации о них практически нет. При этом обращает на себя внимание то, что некоторые вопросы по клумбовым четырехугольникам вообще не исследовались.

Например, нигде не рассматривались вневписанные окружности и связанные с ними формулы. Выяснилось также, что вопрос о расстоянии между центрами вписанной и описанной окружностей в четырехугольнике, решенный еще в XVIII веке Фуссом, (Николай Иванович Фусс (1755, Базель — 1825, Санкт-Петербург), российский математик швейцарского происхождения, ученик Леонарда Эйлера, академик Санкт-Петербургской Академии наук), не давал покоя некоторым математикам. Возможно, их не удовлетворяла установленная Фуссом сложная — в отличие от треугольника — зависимость.

Напомним, что формула Фусса для расстояния между центрами окружностей в этих четырехугольниках имеет вид: $l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}$, и она одна из ряда других формул, полученных им для вписанных и одновременно описанных многоугольников.

Известна также формула американского математика XX века Леонарда Карлитца (1907—1999): $l^2 = R^2 - 2Rr\mu$, где μ выражается через стороны четырехугольника: $\mu = \sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}} = \sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{(b+d)^2(ac+bd)}}$.

Еще бо́льшая громоздкость последней формулы говорит о сложности ее получения и о попытке математика увязать ее с формулой Эйлера для треугольника (случай $\mu = 1$). Более простые зависимости были получены в § 2:

$$l^2 = r^2 \cdot \frac{1 - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta}; \qquad l = \frac{\varepsilon}{\sin\alpha + \sin\beta},$$

где α и β — углы клумбового четырехугольника при одной из его сторон, ε — расстояние между серединами диагоналей четырехугольника. Введение параметра $R_{эфф} = \dfrac{r}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ позволило уже две формулы записать в формате, подобном формулам для треугольника:

$$l^2 = R^2 - 2R_{эфф}r \quad \text{и} \quad L_i^2 = R^2 + 2R_{эфф}\rho_i,$$

где вторая зависимость есть расстояние между центром описанной окружности и центром вневписанной окружности с радиусом ρ_i, а i означает соответствующую сторону четырехугольника (*a, b, c, d*).

Хотя количество формул для этих четырехугольников довольно велико, клумбовый четырехугольник будет изучаться в школьной математике лишь в том случае, если для него будет достаточно задач разного уровня сложности. До сих пор эти четырехугольники встречались на экзаменах только в виде равнобедренной трапеции. Ниже приведены задачи и для других типов четырехугольников.

Задача 1. В треугольник *ABC* со сторонами *a, b, c* вписана окружность. Со стороны вершины С проведена касательная *PQ* к окружности так, что образовавшийся четырехугольник вписан в окружность. Определите стороны и радиус описанной окружности полученного четырехугольника *APQB* (смотри рис. 21).

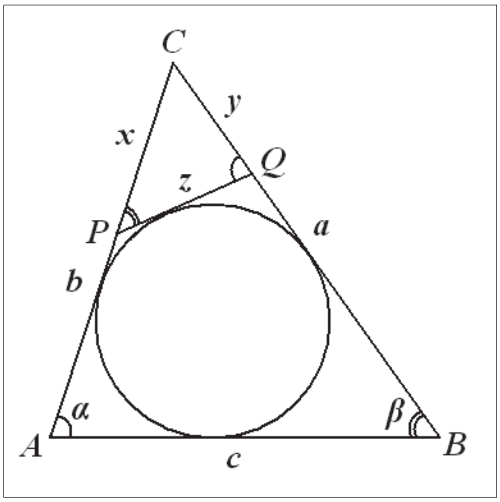


Рис. 21

Учитывая подобие треугольников *PCQ и ABC*, запишем систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}, \\ a - y + b - x = c + z \end{cases}$, решение которой имеет вид:

$$x = a \cdot \frac{p-c}{p}; \quad y = b \cdot \frac{p-c}{p}; \quad z = c \cdot \frac{p-c}{p}, \text{ причем } x + y + z = a + b - c.$$

Стороны полученного четырехугольника равны:

$$AP = (a+b) \cdot \frac{p-a}{p}; \quad QB = (a+b) \cdot \frac{p-b}{p}; \quad PQ = c \cdot \frac{p-c}{p}; \quad AB = c.$$

Для того чтобы получить радиус описанной окружности, необходимо в формулу $R_{APQB} = r \cdot \dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha \cdot \sin\beta}}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ подставить значения синусов из теоремы синусов для треугольника. Таким образом, находим радиус описанной окружности четырехугольника: $R_{APQB} = 2Rr \cdot \dfrac{\sqrt{4R^2+ab}}{ab}$, где R и r — соответствующие радиусы для исходного треугольника. Следует отметить, что для прямоугольного треугольника с прямым углом C формулы несколько упрощаются:

$$x = a \cdot \frac{r}{p}; \quad y = b \cdot \frac{r}{p}; \quad z = c \cdot \frac{r}{p},$$

причем $x + y + z = 2r$, $R_{APQB} = r \cdot \dfrac{c\sqrt{c^2+ab}}{ab}$.

В качестве примера рассмотрим треугольник со сторонами $a = 7$, $b = 15$, $c = 20$. Сначала определяем два радиуса $r = 2$, $R = 12{,}5$. Далее подстановка в формулы для четырехугольника дает такие значения:

$AP = 14\dfrac{2}{3}$; $QB = 6\dfrac{2}{7}$; $PQ = \dfrac{20}{21}$; $R_{APQB} = \dfrac{10}{21}\sqrt{730}$.

Задача 2. Определите стороны трапеции, у которой радиус вписанной окружности равен r, а радиус описанной окружности равен R (смотри рис. 22).

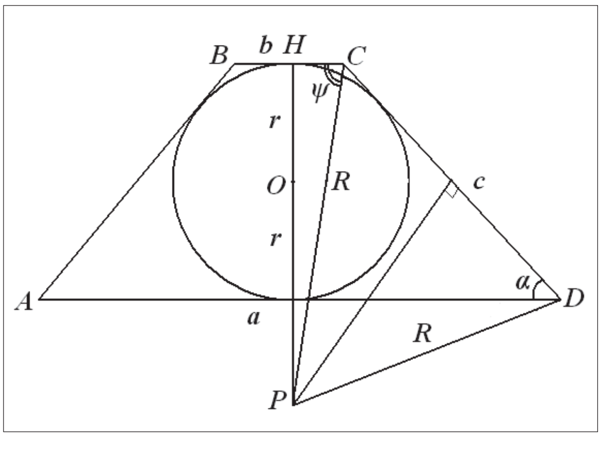


Рис. 22

Углы при основании такой трапеции равны, поэтому формула для радиусов имеет вид: $R^2 = r^2 \cdot \dfrac{1+\sin^2\alpha}{\sin^4\alpha}$, отсюда $\sin^2\alpha = \dfrac{r^2}{2R^2}\left(1+\sqrt{1+4\dfrac{R^2}{r^2}}\right)$.

Далее, решая систему уравнений $\begin{cases} a+b=2c, \\ a=b+2c\cdot\cos\alpha \end{cases}$, находим стороны трапеции $c=\dfrac{2r}{\sin\alpha}$; $a=\dfrac{2r}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)$; $b=\dfrac{2r}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha)$.

В качестве примера рассмотрим трапецию с соотношением радиусов $R=\sqrt{6}\cdot r$. В этом случае $\alpha=45^0$ и стороны соответственно равны $a=2r(\sqrt{2}+1),\ b=2r(\sqrt{2}-1),\ c=2r\sqrt{2}$.

Особый интерес представляет трапеция, у которой центр описанной окружности лежит на ее основании. Тогда из рисунка следует, что $2r=R\cdot\sin\psi=R\cdot\sin(180^0-2\alpha)$, и в результате получаем следующее выражение: $a=2R=\dfrac{2r}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{2r}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)$. Решение квадратного уравнения относительно косинуса приводит к значению $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, напоминающему о золотом сечении. Угол при этом равен ≈ $51{,}83^0$.

Задача-исследование 3. Определите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей, если центр описанной окружности лежит на стороне четырехугольника (смотри рис. 23).

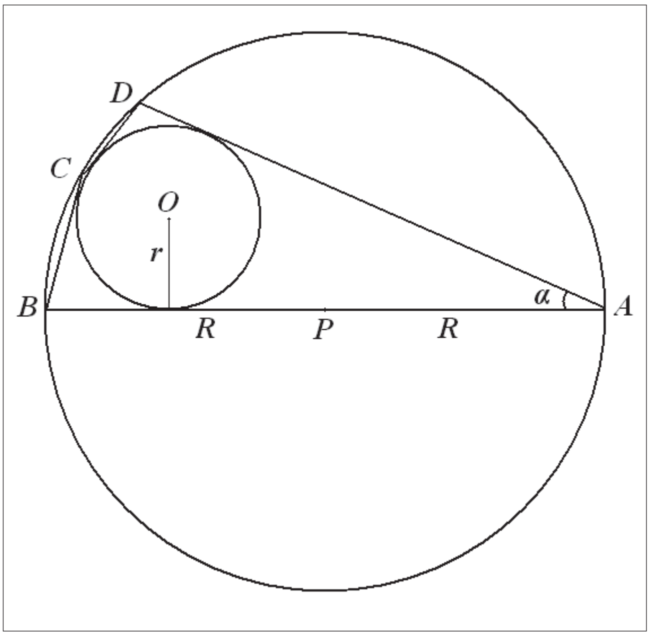


Рис. 23

Условием равенства стороны диаметру описанной окружности является уравнение $2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=1$ (3), полученное в § 6. Пусть α является независимой переменной, тогда β находим из данного уравнения после некоторых преобразований:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=1,\quad \text{или}\quad \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Введем обозначение $\varphi=\arccos\left(\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$, тогда $\beta=\varphi-\frac{\alpha}{2}$ (4).

Воспользуемся равенствами (3) и (4) для преобразования формулы отношения радиусов $\frac{r}{R}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sqrt{1+\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$.

Подкоренное выражение преобразуем к виду:

$$1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=1+\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Таким образом,

$$\frac{r}{R}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\varphi}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\varphi}}.$$

Теперь если ввести обозначение $x=\sin\frac{\alpha}{2}$, то получаем следующее выражение для отношения радиусов:

$$\frac{r}{R}=2x\cdot\sqrt{\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3-x\cdot\sqrt{1-x^2-x^4}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+x\cdot\sqrt{1-x^2-x^4}}}=2x\cdot\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3-x\cdot\sqrt{1-x^2-x^4}}{1-2x^2}.$$

Получившаяся формула довольно сложна, поэтому удобно было для исследования воспользоваться программой Advanced Grapher. На рисунке 24 показана зависимость отношения радиусов от x. Как и следовало ожидать, наибольшего значения зависимость достигает при $x\approx 0,43702$, что соответствует равенству $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$, то есть случаю рассмотренной выше трапеции с углом $51{,}83^0$.

При этом значение отношения равно $\approx 0{,}48587$, или $\frac{r}{R}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)^3$.

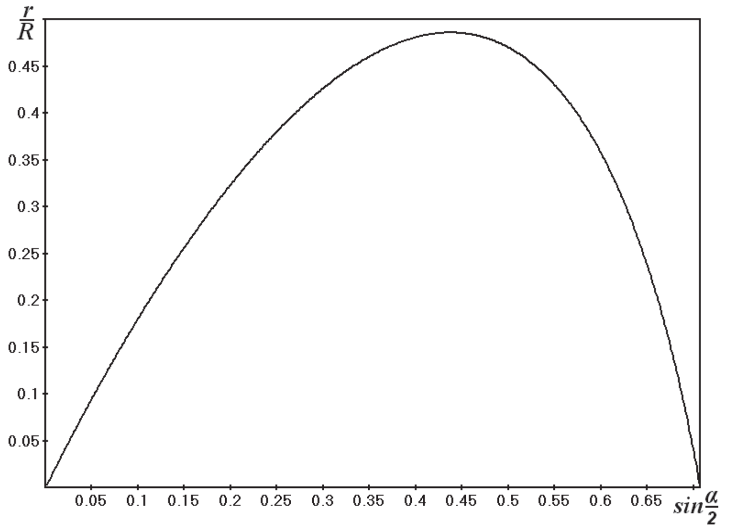


Рис. 24

Задача 4. Определите стороны дельтоида, у которого радиус вписанной окружности равен r, а радиус описанной окружности равен R (смотри рис. 25).

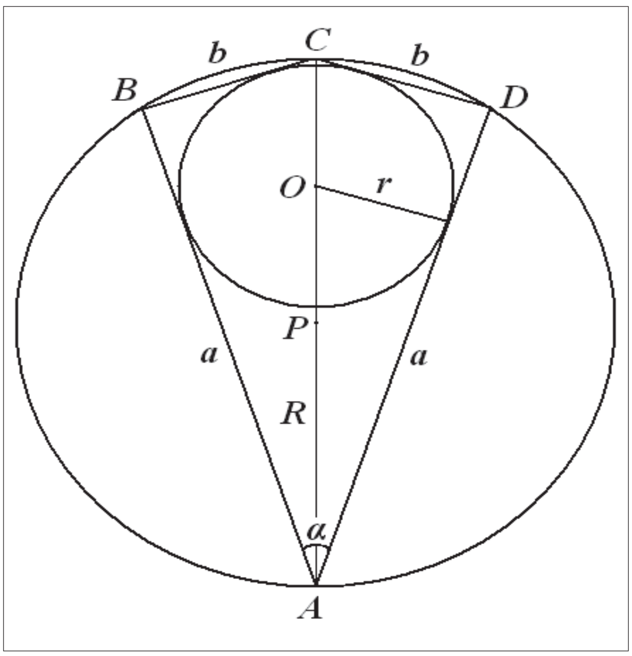


Рис. 25

В случае дельтоида один из углов равен 90^0, поэтому формула для радиусов имеет вид: $R^2 = r^2 \cdot \dfrac{1+\sin\alpha}{\sin^2\alpha}$, отсюда $\sin\alpha = \dfrac{r^2}{2R^2}\left(1+\sqrt{1+4\dfrac{R^2}{r^2}}\right)$.

Далее из рисунка следует, что $a = 2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $b = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$. В качестве примера рассмотрим дельтоид с соотношением радиусов $R = \sqrt{6}\cdot r$. В этом случае $\alpha = 30^0$ и стороны соответственно равны $a = r(3+\sqrt{3}),\ b = r(3-\sqrt{3})$.

Задача 5. Докажите, что для клумбового четырехугольника выполняется тождество $\dfrac{1}{OO_a^{\ 2}} + \dfrac{1}{OO_b^{\ 2}} + \dfrac{1}{OO_c^{\ 2}} + \dfrac{1}{OO_d^{\ 2}} = \dfrac{1}{r^2}$, где OO_i — расстояние от центра вписанной окружности до центра вневписанной окружности.

На рисунке 26 показаны два центра вневписанных окружностей, касающихся сторон *b* и *c*.

Так как $OD^2 = \dfrac{r^2}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$ и $OB^2 = \dfrac{r^2}{\sin^2\dfrac{\beta}{2}}$, то $\dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{r^2}$.

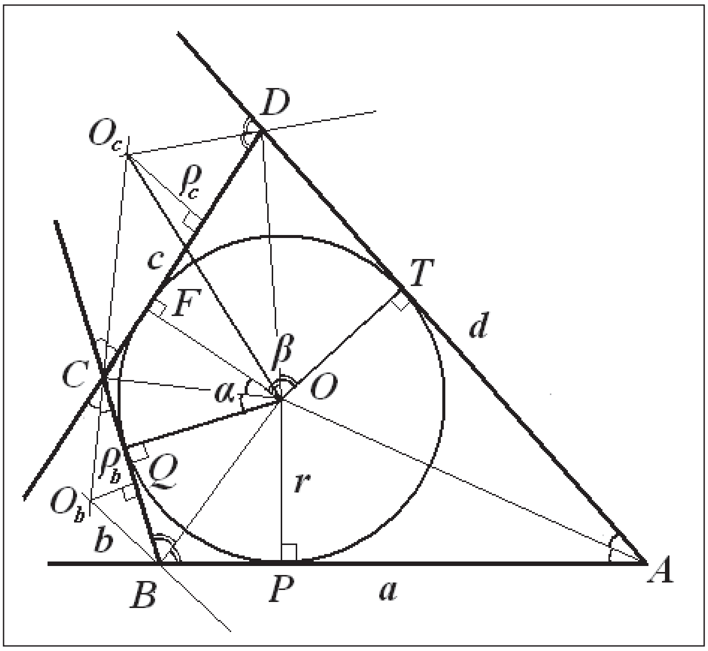


Рис. 26

Треугольники, вершины которых — центр вписанной окружности, центр вневписанной окружности и вершина четырехугольника, являются прямоугольными, поэтому $OO_c^{\,2} = OD^2 + O_cD^2 = \dfrac{r^2}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}} + \dfrac{\rho_c^2}{\sin^2\dfrac{\beta}{2}}$.

Для дальнейших преобразований необходим список радиусов вневписанных окружностей:

$$\rho_{\grave{a}} = \frac{r}{tg\dfrac{\alpha}{2}\cdot tg\dfrac{\beta}{2}}; \qquad \rho_b = r\cdot\frac{tg\dfrac{\alpha}{2}}{tg\dfrac{\beta}{2}};$$

$$\rho_{\tilde{n}} = r\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}; \qquad \rho_d = r\cdot\frac{tg\dfrac{\beta}{2}}{tg\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Воспользовавшись этими зависимостями, получаем следующее выражение: $OO_c^{\,2} = \dfrac{r^2}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}} + \dfrac{r^2\cdot tg^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot tg^2\dfrac{\beta}{2}}{\sin^2\dfrac{\beta}{2}} = \dfrac{r^2}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}} + \dfrac{r^2\cdot tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}} = \dfrac{r^2}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Аналогично можно получить и другие равенства:

$$OO_b^{\,2} = \frac{r^2}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\beta}{2}}; \qquad OO_a^{\,2} = \frac{r^2}{\sin^2\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}; \qquad OO_d^{\,2} = \frac{r^2}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, несложно получить требуемое тождество: $\dfrac{1}{OO_a^{\,2}} + \dfrac{1}{OO_b^{\,2}} + \dfrac{1}{OO_c^{\,2}} + \dfrac{1}{OO_d^{\,2}} = \dfrac{1}{r^2}$.

Учитывая полученные ранее равенства, приведем и другие интересные соотношения:

$$OO_a^{\,2} + OO_b^{\,2} + OO_c^{\,2} + OO_d^{\,2} = \frac{16r^2}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta};$$

$$OO_a^{\,2} + OO_b^{\,2} + OO_c^{\,2} + OO_d^{\,2} \ge 16r^2;$$

$$OO_a^{\,2} + OO_b^{\,2} + OO_c^{\,2} + OO_d^{\,2} = (\rho_a + \rho_b + \rho_c + \rho_d)^2;$$

$$OO_a^2 + OO_b^2 + OO_c^2 + OO_d^2 = r^4\left(\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d}\right)^2.$$

В заключение приведем алгоритм получения рациональных четырехугольников. Алгоритм получения рациональных треугольников, то есть треугольников, у которых стороны, площадь и радиусы вписанной и описанной окружностей представляют собой натуральные либо рациональные числа, известен. В одном из номеров журнала «Математика в школе» когда-то была напечатана большая таблица таких треугольников. В этом алгоритме задаются два тангенса половинных углов треугольника и радиус описанной окружности в виде рациональных чисел. А затем, используя формулы, получаем все остальные параметры треугольника. Аналогично и для четырехугольника.

Пусть значения котангенсов половинных углов известны и равны $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{3}{4}$. Выбираем радиус вписанной окружности, равный произведению $r=3\cdot 4=12$. Отсюда получаем параметры четырехугольника:

$a=17$; $b=27$; $c=34$; $d=24$; $S=612$; $\ell=\frac{5}{24}\sqrt{481}$; $R=\frac{5}{24}\sqrt{7969}$; $\varepsilon=\frac{51}{130}\sqrt{481}$;

$\rho_a=6$; $\rho_b=13\frac{1}{2}$; $\rho_c=24$; $\rho_d=10\frac{2}{3}$; $\sin\alpha=\frac{12}{13}$; $\sin\beta=\frac{24}{25}$; $\sin\varphi=\frac{612}{613}$.

Следовательно, выбирая натуральные либо рациональные значения котангенсов половинных углов и соответствующее значение радиуса вписанной окружности, можно получить рациональные значения большинства параметров четырехугольника и составить на основе этих данных таблицу.

§ 5. Теорема о центре вписанной окружности

Рассмотрим положение центра вписанной окружности для клумбового четырехугольника. Благодаря удачному выбору параметров, появилась возможность выяснить положение центра вписанной окружности для таких четырехугольников, что невозможно было сделать раньше. С одной стороны, аккуратное геометрическое построение (смотри рис. 27) подсказывает положение центра вписанной окружности, с другой стороны, геометрического доказательства именно этого положения до сих пор не найдено. Зато для аналитического доказательства есть все предпосылки.

Отношение отрезков, на которые центр вписанной окружности четырехугольника делит расстояние между серединами диагоналей в случае клумбового четырехугольника (исключая квадрат), когда $\gamma = 180^0 - \alpha$ и $\delta = 180^0 - \beta$, несколько упрощается $\dfrac{PO}{OQ} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

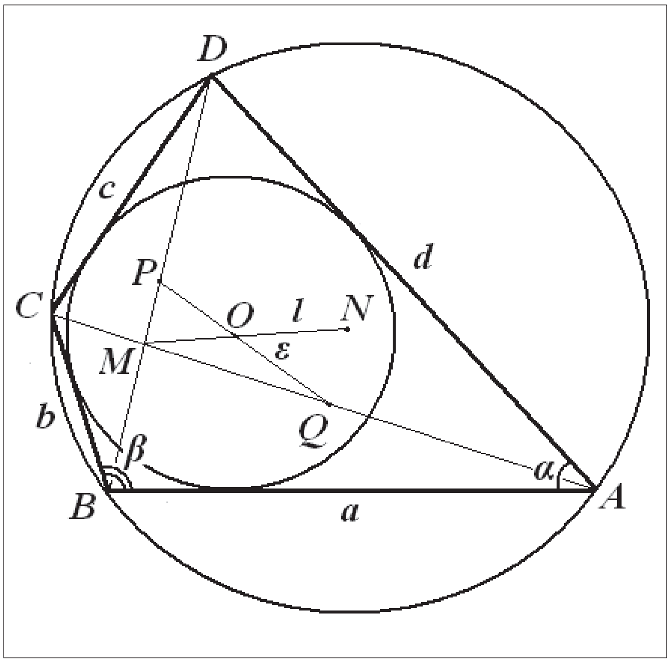


Рис. 27

В дальнейшем нам понадобится еще формула для угла между диагоналями $\sin\varphi = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{1 + \sin\alpha \sin\beta}$ и формулы расстояния между центрами окружностей в виде $l = \dfrac{\varepsilon}{\sin\alpha + \sin\beta}$; $l = \left(\dfrac{2\varepsilon}{p}\right)\dfrac{r}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

Воспользуемся перечисленными выше формулами. Так как треугольники *ABC* и *ABD* клумбового четырехугольника вписаны в окружность, то ее центр находится на пересечении серединных перпендикуляров, проведенных в точках *P* и *Q* к диагоналям. Рассмотрим четырехугольник *QMPN* (смотри рис. 28), где *M* — точка пересечения диагоналей, *N* — центр описанной окружности четырехугольника *ABCD*.

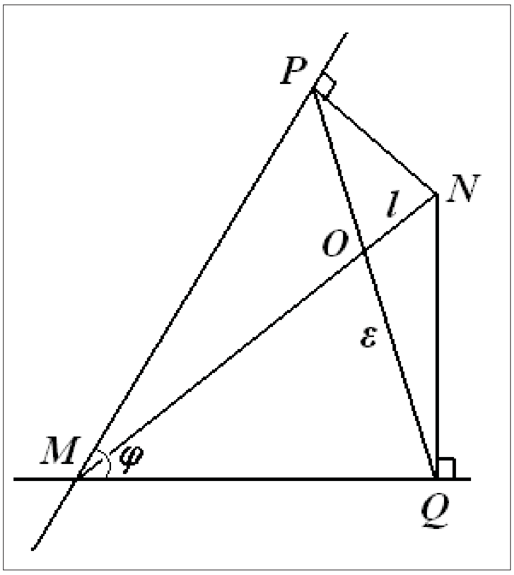


Рис. 28

Так как треугольники *MPN* и *MQN* прямоугольные, то четырехугольник *QMPN* вписан в окружность с диаметром *MN*. Найдем произведение отрезков *PO* и *OQ*, равных $\frac{\varepsilon \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}$ и $\frac{\varepsilon \cdot \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$ соответственно. Произведение этих отрезков равно:

$$PO \cdot OQ = \frac{\varepsilon^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{(\sin\alpha + \sin\beta)^2} = \left(\frac{2\varepsilon}{p}\right)^2 \cdot \frac{r^2}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

В то же время произведение отрезков l и $MN - l$ получается следующим. Из теоремы синусов следует, что $MN = \frac{\varepsilon}{\sin\varphi}$, а учитывая выражения для синуса угла между диагоналями и для полупериметра, имеем: $MN = \frac{\varepsilon \cdot (1 + \sin\alpha \cdot \sin\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{2r\varepsilon \cdot (1 + \sin\alpha \cdot \sin\beta)}{p \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

Таким образом, $MN - l = \frac{2\varepsilon}{p} \cdot r$ и $l \cdot (MN - l) = \left(\frac{2\varepsilon}{p}\right)^2 \cdot \frac{r^2}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

Получаем равенство произведений отрезков хорд *MN* и *PQ* в окружности $l \cdot (MN - l) = PO \cdot OQ$, которое означает, что точка *O* находится на пересечении диагоналей четырехугольника *QMPN*.

Таким образом, доказана **теорема** о центре вписанной окружности: *центр вписанной окружности в клумбовом четырехугольнике лежит на пересечении диагоналей четырехугольника, вершинами которого являются середины диагоналей, точка пересечения самих диагоналей и центр описанной окружности данного четырехугольника*.

Так как для дельтоида внутренний четырехугольник вырождается в отрезок (отрезки PQ и MN совпадают), можно предложить другую формулировку теоремы. Для этого учтем то, что отношение $\frac{MO}{NO} = \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

В этом случае теорема звучит так: *центр вписанной окружности клумбового четырехугольника находится на отрезке между точкой пересечения диагоналей и центром описанной окружности и делит это расстояние в отношении* $\frac{1}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$, *считая от центра описанной окружности.*

Кстати, если вернуться к задаче о расстоянии между центрами окружностей в четырехугольнике, то из соотношения $\frac{MO}{NO}$ следует, что $l = \frac{MN}{1+\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\varepsilon}{\sin\varphi \cdot (1+\sin\alpha \cdot \sin\beta)} = \frac{\varepsilon}{\sin\alpha + \sin\beta}$, то есть уже известный результат.

Сформулированная выше теорема не могла быть получена раньше в силу того, что некоторых довольно сложных формул просто не было. Все необходимое для доказательства: формула для вычисления угла между диагоналями, формула для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей четырехугольника, формула для расстояния между серединами диагоналей и соотношение, в котором центр вписанной окружности четырехугольника делит отрезок между серединами диагоналей, — получены только в 2016—2017 годах. Таким образом, благодаря тригонометрии появилась совершенно новая теорема о центре вписанной окружности для клумбового четырехугольника.

§ 6. Формула расстояния и ее геометрический смысл

В § 2 главы II были получены формулы расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей четырехугольника: $l^2 = R^2 - 2R_{эфф}r$, $l^2 + R^2 = 2R^2_{эфф}$. У формул есть конкретный геометрический смысл.

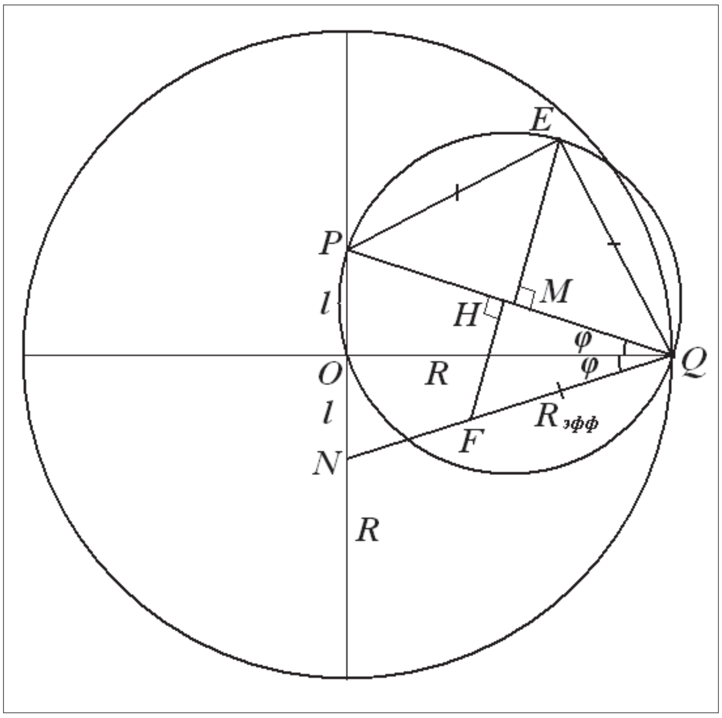


Рис. 29

Пусть даны радиус описанной окружности и расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. На рисунке 29 показаны центры вписанных окружностей — точки *P* и *N*. Отрезок *PQ* в соответствии с формулой есть $\sqrt{2}R_{эфф}$. Строим окружность с центром в точке *M*, в результате катеты равнобедренного треугольника *PEQ* равны $R_{эфф}$. Из формулы $\frac{l^2}{2R^2_{эфф}} = \frac{R^2}{2R^2_{эфф}} - \frac{r}{R_{эфф}}$ следует равенство $\frac{r}{R_{эфф}} = \cos 2\phi = \sin\alpha \cdot \sin\beta$. Таким образом, отложив отрезок *QF*, равный $R_{эфф}$, и построив перпендикуляр *FH*, получаем радиус вписанной окружности $r = QH$. Но можно поступить и иначе. Рассмотрим точки пересечения окружностей на рисунке 30.

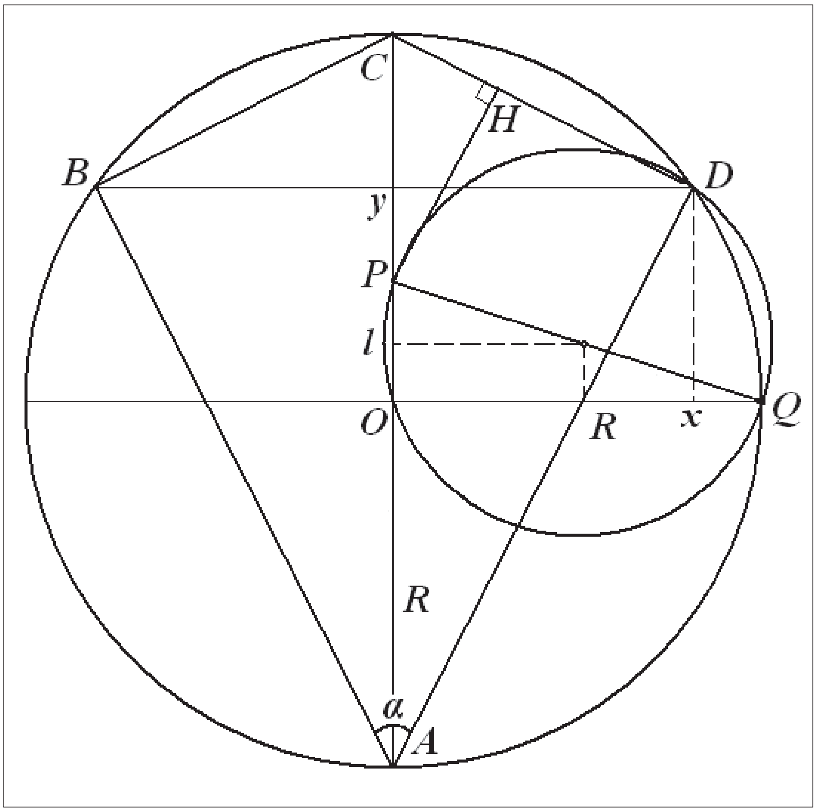


Рис. 30

Запишем уравнения окружностей $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{R^2_{эфф}}{2} \end{cases}$.

Решением этой системы будут координаты точек $\begin{cases} x = R \cdot \frac{R^2 - l^2}{R^2 + l^2} \\ y = R \cdot \frac{2R \cdot l}{R^2 + l^2} \end{cases}$ и $\begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases}$.

Теперь, учитывая, что $\frac{l^2}{R^2} = \frac{1 - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{1 + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$, получаем координаты точки D: $\begin{cases} x = R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ y = R \cdot \sqrt{1 - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} \end{cases}$. С другой стороны, с учетом того, что угол $ADC = \beta = 90^0$, из рисунка следует: $x = 2R \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2} = R\,sin\alpha,$ то есть точка D есть вершина дельтоида. Осталось провести перпендикуляр к CD, и получим радиус вписанной окружности всех клумбовых четырехугольников при заданных l и R.

Упражнения к главам

1. Площадь и радиус вписанной окружности описанного четырехугольника равны S и r. Противоположные стороны относятся друг к другу как 2:3 и 1:2. Найдите стороны четырехугольника.

Ответ: $a = \frac{2}{5} \cdot \frac{S}{r}$; $b = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{r}$; $c = \frac{3}{5} \cdot \frac{S}{r}$; $d = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{r}$.

2. Найдите высоту описанной прямоугольной трапеции с основаниями a и b.

Ответ: $h = \frac{2ab}{a+b}$.

3. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению ее оснований.

4. Найдите высоту описанной трапеции с основаниями a и b, если ее можно вписать в окружность.

Ответ: $h = \sqrt{ab}$.

5. Докажите, что площадь равнобочной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению среднего арифметического и среднего геометрического ее оснований.

6. Докажите, что в описанном четырехугольнике равны суммы углов, под которыми видны из центра вписанной окружности противоположные стороны.

7. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются.

8. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M, отличная от A, B и C. Докажите, что один из отрезков AM, AB, AC равен сумме двух других.

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 9$, $BC = CD = 11$, $AD = 15$ и диагональю $AC = 16$.

А. Докажите, что около него можно описать окружность.

Б. Найдите диагональ BD.

Ответ: $\cos B = -\frac{3}{11}$; $\cos D = \frac{3}{11}$; $BD = \frac{33}{2}$.

10. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Известно, что $AD = d$ (8), $AB = a$ (4), угол CDB равен φ (60^0).

А. Докажите, что EM — медиана треугольника CED.

Б. Найдите длину EM.

Ответ: $EM = 2\sqrt{15}$.

11. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

А. Докажите, что квадрат диаметра равен сумме квадратов противоположных сторон.

Б. Найдите площадь четырехугольника, если $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{7}$.

Ответ: $S = \frac{1}{2}(\sqrt{35} + \sqrt{20})$.

12. Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $CD = 17$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M, причем угол AMB равен 60^0. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырехугольника.

Ответ: $R = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\varphi}}{2\sin\varphi}$, $R = \sqrt{133}$.

13. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, в котором диагональ BD (d_1) проходит через середину диагонали AC. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2d_1^2$.

14. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Докажите, что точка M является серединой BD тогда и только тогда, когда $BA{:}AD = DC{:}CB$.

15. Четырехугольник вписан в окружность и описан около окружности. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, перпендикулярны.

16. В трапецию вписана окружность. Найдите площадь трапеции, если известны длина a одного основания и длины m и n отрезков, на которые делится точкой касания одна из боковых сторон (отрезок m примыкает к данному основанию).

Ответ: $S = a\sqrt{mn}\cdot\left(1+\frac{n}{a-m}\right)$.

17. Биссектрисы углов, образованных противоположными сторонами выпуклого четырехугольника, перпендикулярны. Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

18. Четырехугольник вписан в одну окружность и описан около другой. Докажите, что точки касания вписанной окружности делят противоположные стороны четырехугольника в равных отношениях.

19. Докажите, что в описанном четырехугольнике $ABCD$ прямые AP и CQ, соединяющие две противоположные вершины A и C с точками P и Q касания сторон BC и AB, пересекаются на диагонали BD.

20. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что в четырехугольник, вершинами которого служат ортогональные проекции точки пересечения диагоналей на стороны, можно вписать окружность.

21. Докажите, что трапеция $ABCD$ является описанной тогда и только тогда, когда ее основания BC и AD имеют отношение $tg\frac{A}{2} : tg\frac{C}{2}$.

22. Докажите, что квадраты расстояний от центра окружности, вписанной в четырехугольник, до двух его противоположных вершин относятся как произведения сторон, сходящихся в этих вершинах.

23. Окружность высекает на сторонах трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равные отрезки. Эта окружность пересекает боковую сторону AB в точках P и H. Докажите, что биссектрисы углов трапеции пересекаются в центре этой окружности. Найдите высоту трапеции, если длины отрезков $AP = 6$, $AH = 10$, $BH = 2$.

Ответ: $h = 8\sqrt{2}$.

Литература

1. *Малышев, И. Г.* Клумбовый четырехугольник / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2016. — № 3. — С. 50—53.

2. *Малышев, И. Г.* Некоторые задачи о клумбовом четырехугольнике / И. Г. Малышев // Математика для школьников. — 2017. — № 1. — С. 3—8.

3. *Малышев, И. Г.* О некоторых параметрах клумбового четырехугольника / И. Г. Малышев // Scientific discussion. — 2018. — № 22. — Т. 1. — С. 27—32.

4. *Малышев, И. Г.* О новых формулах и теоремах элементарной геометрии / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2018. — № 4.

5. *Малышев, И. Г.* О новых формулах площади клумбового четырехугольника / И. Г. Малышев // Znanstvena misel journal. — 2017. — № 2. — С. 46—49.

6. *Малышев, И. Г.* О перечне формул клумбового четырехугольника / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2017. — № 6. — С. 38—42.

7. *Малышев, И. Г.* О расположении центра окружности, вписанной в четырехугольник / И. Г. Малышев // Математика для школьников. — 2018. — № 1. — С. 3—5.

8. *Малышев, И. Г.* О расстоянии между центрами окружностей в клумбовом четырехугольнике / И. Г. Малышев // Математика в профильной школе. Фрактал. — 2016. — № 2. — С. 13—19.

9. *Малышев, И. Г.* О формулах расстояния между центрами окружностей в клумбовом четырехугольнике / И. Г. Малышев // Znanstvena misel journal. — 2018. — № 14. — Vol. 1. — С. 46—48.

10. *Малышев, И. Г.* Семь формул площади клумбового четырехугольника / И. Г. Малышев // Математика для школьников. — 2017. — № 2. — С. 3—5.

11. *Малышев, И. Г.* Теорема о центре окружности, вписанной в клумбовый четырехугольник / И. Г. Малышев // Danish scientific journal. — 2018. — № 10. — Vol. 2. — С. 59—61.

12. *Понарин, Я. П.* Элементарная геометрия. В 3 т. Т. 1. Планиметрия. Преобразования плоскости / Я. П. Понарин. — М. : МЦНМО, 2018. — 312 с.

13. *Josefsson, M.* The Area of a Bicentric Quadrilateral / M. Josefsson // Forum Geometricorum. — 2011. — Vol. 11. — P. 155—164.

14. *Radić, M.* Certain inequalities concerning bicentric quadrilaterals, hexagons and octagons / M. Radić // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. — 2005. — Vol. 6. — Issue 1. — Article 1.

Учебное пособие

Малышев Игорь Геннадьевич

Геометрия вписанных и описанных четырехугольников

**Элективный курс для классов
с углубленным изучением математики**

Редактор *Н. А. Чиркова*
Корректор *В. А. Буренкова*
Компьютерная верстка *М. В. Семиковой*

Оригинал-макет подписан в печать 18.03.2019 г.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{8.}$ Бумага офсетная. Гарнитура «Times».
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 7,44. Тираж 100 экз. Заказ 2531.
ГБОУ ДПО «Нижегородский институт развития образования»
603122, Н. Новгород, ул. Ванеева, 203.
www.niro.nnov.ru
Отпечатано в издательском центре учебной
и учебно-методической литературы ГБОУ ДПО НИРО

И. Г. Малышев

Геометрия вписанных *и* описанных четырехугольников

Элективный курс для классов
с углубленным изучением математики

Учебное пособие

НИРО
НИЖЕГОРОДСКИЙ
ИНСТИТУТ
РАЗВИТИЯ
ОБРАЗОВАНИЯ